

Estabilización Consistente de la Solución Mediante Elementos Finitos de la Ecuación de Advección-difusión-reacción

A. X. Jerves

Maestría de Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería

Universidad Politécnica Salesiana – Cuenca, Ecuador

Calle Vieja 12-30 y Elia Liut

alexjerves82@gmail.com

Resumen

En el presente artículo, el cual es un resumen de los aportes realizados en [41], se analizan y estudian los problemas de inestabilidad en la solución de la ecuación de advección-difusión-reacción (ADR) mediante el método de elementos finitos estándar (Galerkin). Se estudia las propiedades de tres formulaciones débiles del problema general, en particular, la existencia y unicidad de la solución en cada una de las formulaciones débiles. Luego, se desarrolla la teoría general sobre técnicas de estabilización consistentes para la ecuación ADR; además, se estudian las técnicas consistentes: streamline upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) y Galerkin/least-squares (GLS). La parte central de este artículo es el estudio, interpretación, análisis, y desarrollo en elementos triangulares lineales de las técnicas de subescalas, en particular, la técnica de subescalas algebraicas (ASGS) y la de subescalas ortogonales (OSS). Esto también comprende el desarrollo de una expresión para el parámetro de estabilización basada en un análisis de Fourier de la ecuación ADR de las subescalas.

Palabras Claves: *advección-difusión-reacción (ADR), método de elementos finitos, formulaciones débiles, técnicas consistentes de estabilización, streamline upwind/Petrov-Galerkin (SUPG), Galerkin/least-squares (GLS), técnicas de subescalas, subescalas algebraicas (ASGS), subescalas ortogonales (OSS), parámetro de estabilización, análisis de Fourier.*

Abstract

In this paper, which is a summary of the contributions made by [41], we analyze and study instability problems in the solution of the advection-diffusion-reaction equation (ADR) using the standard finite element method. Three weak formulations, whose properties are studied, are obtained from the general problem. Specifically, we study the existence and uniqueness of the solution for each of the weak formulations. Then, we develop a consistent stabilization techniques general theory for the ADR equation. Moreover, we study the consistent techniques: streamline upwind/Petrov-Galerkin (SUPG), and Galerkin/least-squares (GLS). The main part in this paper consist in studying, analyzing, and developing; using linear triangular elements, two of the most important subscales techniques, particularly, the algebraic subscales technique (ASGS), and the orthogonal subscales one. It includes developing a stabilization parameter expression based on an ADR equation Fourier's analysis.

Keywords: *advection-diffusion-reaction (ADR), finite element method, weak formulations, consistent stabilization techniques, streamline upwind/Petrov-Galerkin (SUPG), Galerkin/least-squares (GLS), subscales techniques, algebraic subscales (ASGS), orthogonal subscales (OSS), stabilization parameter, Fourier's analysis.*

1. Descripción de la Ecuación ADR

La ecuación de advección-difusión-reacción (ADR) es una ecuación de transporte para una variable física que modela efectos de advección, difusión y reacción. La cantidad física de interés puede ser la concentración de una especie química pasiva, la temperatura, una cantidad de turbulencia, etc. En adelante, se asume que esta cantidad escalar no tiene interacción con su entorno: esta es un escalar pasivo. Se propone el estudio del siguiente problema:

$$L(u) := -\varepsilon \Delta u + \nabla \cdot (\mathbf{a}u) + su = f \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

donde Ω es un dominio n_d -dimensional ($n_d = 1, 2, 3$) con un contorno $\partial\Omega$; ε es la constante de difusión del medio; f es el término fuente; \mathbf{a} es el campo de advección (no necesariamente solenoidal) y s es un término reactivo.

2. Forma Generalizada de las Formulaciones Débiles

Del problema diferencial dado por la ecuación (1), se pueden obtener tres formulaciones débiles [36]; dependiendo de qué término de la forma integral de la ecuación (1) se integre por partes, y de cómo se lo haga. Para la primera formulación débil, que es la que se utilizará a lo largo de este trabajo, y que se conocerá como formulación débil 0; se integra por partes el término difusivo únicamente. En el caso de la segunda formulación débil, que se conocerá como formulación débil 1/2, además de la integración por partes del término advectivo. Finalmente, la última formulación débil, denominada formulación débil 1, se obtiene de una manera similar a la formulación débil 1/2.

Las tres formulaciones anteriormente descritas se pueden escribir de una única manera. Para esto, se introduce una constante, \wp , la cual puede tomar los siguientes valores:

$$\text{Formulación Débil 0:} \quad \wp = 0,$$

$$\text{Formulación Débil 1/2:} \quad \wp = 1/2,$$

$$\text{Formulación Débil 1:} \quad \wp = 1.$$

De acuerdo con esto, la forma generalizada de las formulaciones débiles de la ecuación de advección-difusión-reacción (1) se lee: encontrar $u \in \mathbf{H}^1$ tal que:

$$\mathbf{a}^\wp(u, v) = \langle f, v \rangle_\Omega + \langle g^\wp, v \rangle_\Gamma \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (2)$$

donde $\mathbf{H}^1(\Omega)$: es un espacio de Hilbert sobre el dominio Ω en el que sus elementos y primeras derivadas son cuadrado integrables.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\wp(u, v) := & \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (1 - \wp)(\mathbf{a} \cdot \nabla u, v) \\ & - \wp(u, \mathbf{a} \cdot \nabla v) + ([s + (1 - \wp)\nabla \cdot \mathbf{a}]u, v) \quad (3) \end{aligned}$$

y

$$g^\wp := (\varepsilon \nabla u - \wp \mathbf{a}u) \cdot \mathbf{n} \quad (4)$$

g^\wp es conocido en Γ_N . Aunque algebraicamente equivalentes, de manera rigurosa, estas formulaciones tienen dos diferencias importantes: sus condiciones naturales respectivas y sus propiedades variacionales. Nótese que la primera diferencia ha aparecido de forma explícita, y se puede apreciar para cada formulación en la forma generalizada (4) de las condiciones de contorno naturales. La segunda diferencia se vuelve evidente cuando se estudia la existencia y unicidad de las soluciones, que es lo que se realizará a continuación.

2.1. Existencia y Unicidad de las Soluciones

El análisis de existencia y unicidad de la solución de la forma general de las formulaciones débiles (3) y sus condiciones de contorno (4) se realiza a través de la aplicación y verificación del cumplimiento de los teoremas de Lax-Milgram y Traza, así como, de la inecuación de Poincaré-Friedrich [36]. Para esto, se asume que

$$s + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad (5)$$

se cumple en casi todo punto (excepto un conjunto de medida nula). Entonces, tomando en cuenta la inecuación (5), aplicando el teorema de Traza y operando, se llega a:

$$\mathbf{a}^\wp(v, v) \geq N \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

donde

$$N = \frac{\varepsilon}{1+A} - A_1^2 \frac{|1-2\wp|}{2} \|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

Por definición, la condición para la coercitividad es $N > 0$; entonces, introduciendo la constante $\mathfrak{A} = A_1^2(1+A)/2$, se requiere entonces que:

$$\varepsilon > \mathfrak{A}|1-2\wp| \|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \quad (6)$$

La inecuación (6) implica que $\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ no debería ser demasiado alto con respecto a la difusión, ε . Si se satisface la condición $N > 0$, el problema (2) tiene solución única.

En resumen, las suposiciones realizadas para demostrar la unicidad de la solución, son:

1. Los datos del problema son tales que $s \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)$.
2. Los términos de reacción y de advección satisfacen que $s + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{a} \geq 0$ casi en todo punto (excepto en un conjunto con medida de Lebesgue nula).
3. Finalmente, se requiere que
 - Formulación débil 0: Γ_N es de salida o la advección no es muy alta en el sentido de la inecuación (6).
 - Formulación débil 1/2: La advección no es muy alta en el sentido de la inecuación (6).
 - Formulación débil 1: Γ_N es de entrada o la advección no es muy alta en el sentido de la inecuación (6).

Se puede ver fácilmente que la gran ventaja que la formulación débil 1/2 tiene sobre las otras dos, es que, aparte de las condiciones (5) y (6), no se requiere condiciones sobre la dirección de \mathbf{a} en Γ_N .

3. Formulación de Elementos Finitos

Para la formulación en elementos finitos de la ecuación de advección-difusión-reacción (1), y a

lo largo del presente artículo, se utilizará la formulación débil 0; esto, debido a que dicha formulación cuenta con una mayor popularidad dentro de los desarrollos de elementos finitos dado que existe una amplia gama de problemas en los que Γ_N es de salida, y a que su implementación es sencilla en relación a la formulación débil 1/2. Además, la formulación débil 0 es menos estable que la 1/2 en problemas advectivos dominantes, razón por la que dicha formulación es adecuada para el desarrollo, análisis y prueba de las técnicas de estabilización que se presentan a lo largo del presente trabajo.

Entonces, para $\wp = 0$, la ecuación (2) se reescribe

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega^{(e)}} \nabla v \cdot \nabla u_h dV + \int_{\Omega^{(e)}} v(\mathbf{a} \cdot \nabla u_h) dV \\ & + \int_{\Omega^{(e)}} s v u_h dV + \int_{\Omega^{(e)}} v(\nabla \cdot \mathbf{a}) u_h dV \quad (7) \\ & = \int_{\Omega^{(e)}} v f dV \end{aligned}$$

Ahora, se introduce la formulación (7) para el elemento triangular lineal, cuyas funciones de forma están dadas por:

$$v_i = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_i^{(e)} + b_i^{(e)}x + c_i^{(e)}y) \quad (8)$$

para $i = 1:3$. En la ecuación (8) los coeficientes a_i , b_i y c_i son

$$\begin{aligned} a_i^{(e)} &= x_j^{(e)}y_k^{(e)} - x_k^{(e)}y_j^{(e)}; \\ b_i^{(e)} &= y_j^{(e)} - y_k^{(e)}; \\ c_i^{(e)} &= x_k^{(e)} - x_j^{(e)} \end{aligned} \quad (9)$$

Y el área del elemento se calcula de:

$$A^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \quad (10)$$

De acuerdo con esto, para el elemento triangular lineal, de la formulación (7), se llega a

$$\left[\varepsilon \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T [B] dV + \int_{\Omega^{(e)}} [v]^T \{\mathbf{a}\}^T [B] dV \right]$$

$$\begin{aligned}
& +s \int_{\Omega^{(e)}} [M] dV + \int_{\Omega^{(e)}} \{\mathbf{\nabla}\}^T \{\mathbf{a}\} [M] dV \Big] \{u\} \\
& = f \int_{\Omega^{(e)}} [v]^T dV
\end{aligned} \tag{11}$$

donde, $[v]$ es un arreglo horizontal de funciones de forma y $\{u\}$ es un arreglo vertical de incógnitas nodales del elemento (“datos”). Así, de la ecuación (11) se obtienen las siguientes matrices y vectores, que caracterizan, en general, todo problema ADR.

Matriz de Difusión

$$[k^{(e)}]_D = \varepsilon \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T [B] dV \tag{12}$$

Matriz de Advección (Convección)

$$\begin{aligned}
[k^{(e)}]_C &= \int_{\Omega^{(e)}} [v]^T \{\mathbf{a}\}^T [B] dV \\
&+ \int_{\Omega^{(e)}} \{\mathbf{\nabla}\}^T \{\mathbf{a}\} [M] dV
\end{aligned} \tag{13}$$

Matriz de Reacción

$$[k^{(e)}]_R = s \int_{\Omega^{(e)}} [M] dV \tag{14}$$

Matriz de Fuerza

$$\{f^{(e)}\} = f \int_{\Omega^{(e)}} [v]^T dV \tag{15}$$

Operando sobre las expresiones (12), (13), (14), y (15); se obtienen las expresiones matriciales presentadas a continuación.

$$[k^{(e)}]_D = \frac{\varepsilon}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^{(e)}b_1^{(e)} + c_1^{(e)}c_1^{(e)} & b_1^{(e)}b_2^{(e)} + c_1^{(e)}c_2^{(e)} & b_1^{(e)}b_3^{(e)} + c_1^{(e)}c_3^{(e)} \\ \text{sim} & b_2^{(e)}b_2^{(e)} + c_2^{(e)}c_2^{(e)} & b_2^{(e)}b_3^{(e)} + c_2^{(e)}c_3^{(e)} \\ & & b_3^{(e)}b_3^{(e)} + c_3^{(e)}c_3^{(e)} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$[k^{(e)}]_C = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} a_x b_1^{(e)} + a_y c_1^{(e)} & a_x b_2^{(e)} + a_y c_2^{(e)} & a_x b_3^{(e)} + a_y c_3^{(e)} \\ a_x b_1^{(e)} + a_y c_1^{(e)} & a_x b_2^{(e)} + a_y c_2^{(e)} & a_x b_3^{(e)} + a_y c_3^{(e)} \\ a_x b_1^{(e)} + a_y c_1^{(e)} & a_x b_2^{(e)} + a_y c_2^{(e)} & a_x b_3^{(e)} + a_y c_3^{(e)} \end{bmatrix} \tag{17}$$

La expresión (17) representa el primer término del lado derecho de la ecuación (13). La segunda matriz en la que se subdivide la matriz de advección se anula debido a que se está considerando flujo incompresible, es decir, el campo de velocidades, \mathbf{a} , es solenoidal; de donde la matriz total de advección queda dada por la matriz (17). Además, se tiene

$$[k^{(e)}]_R = \frac{sA^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

y el vector de términos independientes

$$\{f^{(e)}\} = f \frac{A^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Entonces, para cada elemento, se deberá resolver un sistema lineal de la forma

$$[[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k^{(e)}]_R] \{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\} \tag{20}$$

donde que cada matriz elemental y el vector de términos independientes, están dadas por las ecuaciones (16), (17), (18) y (19), respectivamente.

4. Técnicas de Estabilización Consistentes

Para estabilizar el término advectivo de una manera consistente (estabilización consistente), asegurando que la solución de la ecuación diferencial es también una solución de la forma débil, Hughes y sus colaboradores propusieron varias técnicas. El grupo de Hughes sugirió adherir un término en los elementos interiores de la forma débil de Galerkin. Este término es una función del residuo de la ecuación diferencial que sirve para asegurar consistencia. Estos métodos son diseñados especialmente para la ecuación estacionaria de advección-difusión-reacción (1). El residuo de la ecuación diferencial (1) es

$$r(u) = f - (\varepsilon \Delta u + \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{a}u) + su) = f - L(u) \tag{21}$$

Nótese que cuando se restringe al espacio de dimensiones finitas estándar de elementos finitos (y u es reemplazado por u_h), $r(u_h)$ se calcula para cada elemento interior solamente. La forma general de esta técnica de estabilización consistente es

$$\varepsilon(\nabla u_h, \nabla v) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h, v) + \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} \mathcal{P}(v) \tau^{(e)} r(u_h) dV}_{\text{Término de Estabilización}} = \langle g^\circ, v \rangle_{\Gamma_N} + \langle f, v \rangle_{\Omega^{(e)}} \quad (22)$$

donde $\mathcal{P}(v)$ es cierto operador aplicado a la función de peso, $\tau^{(e)}$ es el parámetro de estabilización (también llamada tiempo intrínseco), y $r(u)$ es el residuo de la ecuación diferencial definido en la ecuación (21). En general, las técnicas de estabilización se caracterizan por la definición de $\mathcal{P}(v)$.

4.1. La Técnica SUPG

Esta técnica de estabilización se define al tomar [37]

$$\mathcal{P}(v) = \varepsilon \Delta v - \nabla \cdot (\mathbf{a}v) \quad (23)$$

Así, ya que el espacio de las funciones de peso no coincide con el espacio de las funciones de interpolación (funciones de prueba), ésta es, una formulación de Petrov-Galerkin.

4.1.1. Implementación del Método de SUPG con Triángulos Lineales de Clase C^0 . Sustituyendo la ecuación (23) en la ecuación (22), operando; y asumiendo que $\tau^{(e)}$ es constante, considerando el campo advectivo, \mathbf{a} , como solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$), es decir, se considera el flujo como incompresible en el dominio Ω , tomando el término reactivo, s , como constante en dicho dominio, se llega a

$$\begin{aligned} & \left[[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k^{(e)}]_R + [k_{SUPG}^{(e)}]_C + [k_{SUPG,CR}^{(e)}] \right] \{u^{(e)}\} \\ & = \{f^{(e)}\} + \{f_{SUPG}^{(e)}\} \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$$[k_{SUPG,CR}^{(e)}] = \frac{\tau^{(e)}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} (a_x b_1 + a_y c_1)(a_x b_1 + a_y c_1) & (a_x b_1 + a_y c_1)(a_x b_2 + a_y c_2) & (a_x b_1 + a_y c_1)(a_x b_3 + a_y c_3) \\ \text{sim} & (a_x b_2 + a_y c_2)(a_x b_2 + a_y c_2) & (a_x b_2 + a_y c_2)(a_x b_3 + a_y c_3) \\ & & (a_x b_3 + a_y c_3)(a_x b_3 + a_y c_3) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[k_{SUPG,CR}^{(e)}] = \frac{\tau^{(e)} s}{6} \begin{bmatrix} a_x b_1 + a_y c_1 & a_x b_1 + a_y c_1 & a_x b_1 + a_y c_1 \\ a_x b_2 + a_y c_2 & a_x b_2 + a_y c_2 & a_x b_2 + a_y c_2 \\ a_x b_3 + a_y c_3 & a_x b_3 + a_y c_3 & a_x b_3 + a_y c_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\{f_{SUPG}^{(e)}\} = \frac{\tau^{(e)} f}{2} \begin{Bmatrix} a_x b_1 + a_y c_1 \\ a_x b_2 + a_y c_2 \\ a_x b_3 + a_y c_3 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

El sistema de ecuaciones (24) se deberá resolver para cada elemento.

4.2. La Técnica de Galerkin/Mínimos Cuadrados

La técnica GLS se define por la imposición de que el término de estabilización en la ecuación (22) es una formulación de mínimos cuadrados ponderados elemento a elemento de la ecuación diferencial original. Esto corresponde a la elección del siguiente operador aplicado al espacio de funciones de peso [37].

$$\mathcal{P}(v) = -L(v) = \varepsilon \Delta v - \nabla \cdot (\mathbf{a}v) - sv \quad (28)$$

Desde un punto de vista práctico no existe una diferencia marcada entre los métodos SUPG y GLS. En efecto, ambos métodos son idénticos para advección-difusión (no reacción) y con elementos lineales (las derivadas de segundo orden son cero en los elementos interiores). Además, la influencia cualitativa de cada término en la definición de \mathcal{P} , ecuación (28), puede ser interpretada como sigue:

$$\mathcal{P}(v) = -L(v) = \underbrace{\varepsilon \Delta v}_0 - \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{a}v)}_{SUPG} - \underbrace{sv}_{Galerkin}$$

El término es cero para elementos lineales, el segundo término corresponde a la estabilización SUPG, y el tercer término es una ponderación de Galerkin. Así, para elementos lineales y reacción constante positiva, la técnica GLS es la SUPG con el término de Galerkin ponderado $1 + \tau^{(e)}s$ veces más. Esto implica que las inestabilidades introducidas por el método de Galerkin están un poco más amplificadas en el GLS que es el SUPG.

A continuación, se da el sistema matricial para la técnica GLS con elementos triangulares lineales

$$\begin{aligned} & \left[[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k_{SUPG}^{(e)}]_C + (1 + \tau^{(e)}s)[k^{(e)}]_R + [k_{GLS,CR}^{(e)}] \right] \{u^{(e)}\} \\ & = (1 + \tau^{(e)}s)\{f^{(e)}\} + \{f_{SUPG}^{(e)}\} \end{aligned} \quad (29)$$

en donde, la matriz advectiva-reactiva de estabilización GLS está dada por:

$$\left[k_{GLS}^{(e)} \right]_{CR} = \left[k_{SUPG}^{(e)} \right]_{CR} + \left[k_{SUPG}^{(e)} \right]_{CR}^T = 2 \left[k_{SUPG}^{(e)} \right]_{CR}^{sim}$$

El sistema de ecuaciones (29) se deberá resolver para cada elemento.

5. Composición de Multiescalas

Un método más general (que puede ser utilizado en muchos casos) en el método variacional de multiescalas [38]. Este se basa en una descomposición de la $u \in \mathcal{V}$ desconocida en una parte soluble $u_h \in V_h$ y una parte en la escala de una submalla $\tilde{u} \in \tilde{V}$, la cual no puede ser capturada por la malla de elementos finitos. Esto corresponde a la descomposición del espacio \mathcal{V} en

$$\mathcal{V} = V_h \oplus \tilde{V}$$

Aplicando dicha descomposición a la forma débil 0, se obtiene:

$$\boxed{a^0(u_h + \tilde{u}, v + \tilde{v}) = \langle g^0, v + \tilde{v} \rangle_{\Gamma_N} + \langle f, v + \tilde{v} \rangle_{\Omega} \quad \forall v \in V_h} \quad (30)$$

Utilizando las propiedades de las formas integrales, se puede descomponer la ecuación (30) en las ecuaciones siguientes:

$$a^0(u_h, v) + a^0(\tilde{u}, v) = \Gamma_N + \langle f, v \rangle_{\Omega} \quad \forall v \in V_h \quad (31)$$

y

$$a^0(u_h, \tilde{v}) + a^0(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Gamma_N + \langle f, \tilde{v} \rangle_{\Omega} \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \quad (32)$$

La ecuación (31) es la ecuación para la escala resoluble u_h y tiene dos términos a su la dos izquierdo: el primero es la contribución del método de Galerkin y el segundo tiene en cuenta la influencia de la subescala en u_h . La ecuación (32) es una ecuación para la contribución de la subescala.

La ecuación (31) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\boxed{a^0(u_h, v) + (L^*(v), \tilde{u}) = \ell(v)} \quad \forall v \in V_h \quad (33)$$

donde que L^* es la adjunta del operador L (con condiciones de contorno de Dirichlet) dado por:

$$L^*(v) = -\varepsilon \nabla v - \mathbf{a} \cdot \nabla v + su$$

y

$$\ell(v) = \langle g^0, v \rangle_{\Gamma_N} - \varepsilon \langle \nabla v, \tilde{u} \rangle_{\Gamma} - \langle \mathbf{a} v, \tilde{u} \rangle_{\Gamma} + \langle f, v \rangle_{\Omega}$$

El operador adjunto L^* se calcula mediante la integración por partes a partir de la siguiente relación con L (prescindiendo de las integrales de contorno):

$$\int_{\Omega} u L^*(w) dV = \int_{\Omega} w L(u) dV$$

Por otro lado, de la ecuación (32) se llega a

$$\boxed{(L(\tilde{u}), \tilde{v}) = \langle f, \tilde{v} \rangle_{\Omega} - (L(u_h), \tilde{v})} \quad (34)$$

Entonces, la ecuación (32) es equivalente a encontrar $\tilde{u} \in \tilde{V}$ tal que

$$\boxed{L(\tilde{u}) = \underbrace{f - L(u_h)}_{\substack{\text{Residuo de la} \\ \text{Ecuación} \\ \text{Original en } \Omega'_h}} + \tilde{v}^{\perp} \quad \text{en } \Omega'_h} \quad (35)$$

Bajo las condiciones de Dirichlet.

$$\tilde{u} = u_{ske} \quad \text{en } \Gamma'_D \quad (36)$$

donde u_{ske} es una función definida en el contorno de Dirichlet de Ω'_h , Γ'_D y \tilde{v}^{\perp} es cualquier función en \tilde{V}^{\perp} (el complemento ortogonal de \tilde{V} en el sentido de $L^2(\Omega'_h)$, esto es: $L^2(\Omega'_h) \supset \mathcal{V} = \tilde{V} \oplus \tilde{V}^{\perp}$). La función u_{ske} debe ser tal que los flujos normales de u sean continuo a través de los contornos de los elementos. En su momento, la función \tilde{v}^{\perp} es la responsable de garantizar que $\tilde{u} \in \tilde{V}$. En el modelado es necesario un paso para resolver el sistema que lleve a una selección de u_{ske} , \tilde{v}^{\perp} y una solución aproximada de la ecuación (35). De aquí que, la solución aproximada se puede escribir como:

$$\tilde{u}|_{\Omega^{(e)}} = L^{-1} \left[\underbrace{f - L(u_h)}_{\substack{\text{Residuo de la} \\ \text{Ecuación en} \\ \Omega^{(e)}}} + \tilde{v}^{\perp} \right] |_{\Omega^{(e)}}$$

$$\simeq \tau^{(e)} \left[\underbrace{f - L(u_h)}_{\substack{\text{Residuo de la} \\ \text{Ecuación en} \\ \Omega^{(e)}}} + \tilde{v}^\perp \right] \quad (37)$$

Esta ecuación enfatiza que $\tau^{(e)}$ es una aproximación del operador diferencial inverso (formal) en cada elemento (e), un hecho que será utilizado para construir una expresión para $\tau^{(e)}$ (ver sección 7). Así, operando se obtiene la aproximación final, dada por:

$$\tilde{u} = \tau \tilde{P}_\tau (f - L(u_h)) \quad (38)$$

Expresión general de las Subescalas

donde $\tilde{P}_\tau = I - \tilde{P}_\tau^\perp$ es la proyección L^2 sobre el espacio \tilde{V} de subescalas (I es la identidad en \tilde{V}). Una elección típica del espacio de subescalas está dada por $\tilde{P}_\tau = I$ la que se conoce como formulación Algebraica de Subescalas (ASGS), siglas de Algebraic Subgrid-Scale. Esta técnica fue desarrollada por T.J.R. Hughes; consiste simplemente en tomar $\tilde{v}^\perp = 0$ para obtener

$$\tilde{u}|_{\Omega^{(e)}} = \tau^{(e)} (f - L(u_h))$$

ASGS

En referencia a la elección, si se define $\tilde{P}_\tau = I - P_{\tau h} := P_{\tau h}^\perp$, donde $P_{\tau h}$ es la proyección $L^2(\Omega'_h)$ sobre el espacio de elementos finitos relacionada con τ . La formulación resultante fue desarrollada por R. Codina y es conocida como Estabilización de Subescalas Ortogonales (OSS), siglas de Orthogonal Subscale Stabilization; esto debido a que esta elección corresponde a tomar \tilde{V} como el complemento ortogonal de V_h .

Además, en el OSS se asume que $P_{\tau h}^\perp(f) = 0$, lo que significa que el vector de fuerzas pertenece al espacio de elementos finitos V_h o es aproximado por un elemento de éste espacio, esto conduce a

$$\tilde{u}|_{\Omega'} = P_{\tau h}^\perp(L(u_h))$$

OSS

Nótese que la técnica OSS proporciona, con respecto al método de Galerkin estándar, un control de mínimos cuadrados sobre la

componente $L(u_h)$ que es ortogonal al espacio de elementos finitos correspondiente.

Finalmente, sustituyendo la ecuación (38) en la ecuación (33) y operando, el problema discreto final (estabilizado con subescalas) es encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$\underbrace{a_\tau^0(u_h, v) = \ell_\tau(v)}_{\substack{\text{Estabilización} \\ \text{con Subescalas}}} \quad \forall v \in V_h \quad (39)$$

5.1. Implementación de la Técnica ASGS

Para la técnica de Subescalas Algebraicas (ASGS) las formas estabilizadas son

$$a_\tau(u_h, v) = a^0(u_h, v) - (L^*(v), \tau L(u_h)) \quad (40)$$

y

$$\ell_\tau(v) = \langle f, v \rangle - (\tau f, L^*(v)) \quad (41)$$

Con la finalidad de obtener una correspondencia entre la estabilización por subescalas y la forma general de las técnicas de estabilización consistentes dada por la ecuación (22), nótese que en subescalas se cumple que $\mathcal{P}(v) = L^*(v)$. Además, la influencia cualitativa de cada término en la definición de \mathcal{P} puede ser interpretada como sigue:

$$\mathcal{P}(v) = L^*(v) = \underbrace{-\varepsilon \Delta v}_0 - \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{a}v)}_{\text{SUPG}} + \underbrace{\underline{sv}}_{\text{Galerkin}}$$

Luego, la diferencia entre el método de Subescalas Algebraicas y el Galerkin/Mínimos Cuadrados radica en que, en términos groseros y para elementos lineales C^0 , el aporte Galerkin en la definición \mathcal{P} tiene signo contrario (en el ASGS es positivo y en el GLS es negativo), ya que en el GLS se escoge $\mathcal{P}(v) = -L(v)$ y en el ASGS se elige $\mathcal{P}(v) = L^*(v)$. En consecuencia, al igual que en el GLS con elementos lineales, en el ASGS, con el mismo tipo de elementos, se agrega a la forma débil estándar de Galerkin cuatro matrices y dos vectores de estabilización, cuatro de los cuales corresponden a la estabilización SUPG, y los otros dos corresponden a la estabilización GLS, propiamente.

Finalmente, sabiendo que $\tau^{(e)}$ es constante, considerando el campo advectivo, \mathbf{a} , como

solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$), es decir, se considera el flujo como incompresible en el dominio Ω , y tomando el término reactivo, s , como constante en dicho dominio, se llega a

$$\begin{aligned} & [[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k_{SUPG}^{(e)}]_C + (1 - \tau^{(e)}s)[k^{(e)}]_R + [k_{ASGS}^{(e)}]_{CR}\{u^{(e)}\}] \\ & = (1 - \tau^{(e)}s)\{f^{(e)}\} + \{f_{SUPG}^{(e)}\} \end{aligned}$$

(42)

donde las matrices $[k^{(e)}]_D$, $[k^{(e)}]_C$, $[k_{SUPG}^{(e)}]_C$, $[k^{(e)}]_R$ están dadas por las ecuaciones (16), (17), (25), (18), la matriz $[k_{ASGS}^{(e)}]_{CR}$, se define como:

$$[k_{ASGS}^{(e)}]_{CR} = [k_{SUPG}^{(e)}]_{CR} - [k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}^T = 2[k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}^{anti}$$

La matriz $[k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}$ está dada por la ecuación (26); y los vectores $\{f^{(e)}\}$, $\{f_{SUPG}^{(e)}\}$ se dan en las ecuaciones (19), (27), respectivamente.

5.2. Implementación de la Técnica OSS

Dada la forma general del método de Galerkin estabilizado con Subescalas (39), las formas estabilizadas correspondientes a la técnica de Subescalas Ortogonales, están dadas por

$$a_\tau^0(u_h, v) = a^0(u_h, v) - (L^*(v), P_{\tau h}^\perp(L(u_h)))_\tau \quad (43)$$

y

$$\ell_\tau(v) = \langle f, v \rangle_{\Omega_h'} \quad (44)$$

recuérdese también que

$$P_{\tau h}^\perp = I - P_{\tau h} \quad (45)$$

donde, $P_{\tau h}$ es la proyección $L^2(\Omega_h')$ sobre el espacio de elementos finitos, V_h , relacionada con el tiempo intrínseco, τ .

Para el cálculo de la proyección $L^2(\Omega_h')$ sobre el espacio de elementos finitos, V_h , relacionada con τ , $P_{\tau h}$, se debe resolver el siguiente problema: encontrar Π_h , tal que

$$(\cdot - \Pi_h, w)_\tau = 0 \quad \forall w \in V_h \quad (46)$$

donde (\cdot) es cualquier elemento de $L^2(\Omega_h')$ (por ejemplo $L(u_h)$), y $\Pi_h = P_{\tau h}(\cdot)$. La ecuación (46) impone la ortogonalidad del “espacio resta” $(\cdot) - \Pi_h$ al espacio de elementos finitos en la normal L^2 que es la que minimiza la distancia entre cualquier $(\cdot) \in L^2(\Omega_h')$ y el espacio V_h .

De acuerdo con lo descrito en los párrafos anteriores, se puede calcular la proyección del lado izquierdo de la expresión (46), en el que se toma a Π_h como una variable nodal adicional.

Finalmente, tomando en cuenta las mismas consideraciones hechas para la técnica ASGS, se obtiene

$$\begin{aligned} & [[k]_D + [k]_C + [k]_R + [k_{SUPG}]_C - [k_{SUPG}]_{CR}^T]\{U\} + [k_{OSS}]_R \\ & - [k_{OSS}]_{CR}^T\{\Pi^I\} = \{f\} \end{aligned} \quad (47)$$

o

$$\begin{aligned} & [[k]_D + [k]_C + [k]_R]\{U\} + [[k_{SUPG}]_C - [k_{SUPG}]_{CR}^T][M]_\tau^{-1}[k_{OSS}]_C\{U\} \\ & - [[k_{SUPG}]_{CR}^T - [k_{OSS}]_R][M]_\tau^{-1} - [k_{OSS}]_C\{U\} = \{f\} \end{aligned} \quad (48)$$

En donde, la matriz $[k_{OSS}]_C$ es la matriz advectiva del aporte de la técnica OSS del ensamblaje del sistema, dada a nivel elemental por la ecuación (49); y $[k_{OSS}]_R$ es la matriz reactiva del aporte de la técnica OSS del ensamblaje del sistema, dada por $s[M]_\tau$, donde que $[M]_\tau$ está dada a nivel elemental por la ecuación (50).

$$[k_{OSS}]_C = \frac{\tau^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} a_x b_1^{(e)} + a_y c_1^{(e)} & a_x b_2^{(e)} + a_y c_2^{(e)} & a_x b_3^{(e)} + a_y c_3^{(e)} \\ a_x b_1^{(e)} + a_y c_1^{(e)} & a_x b_2^{(e)} + a_y c_2^{(e)} & a_x b_3^{(e)} + a_y c_3^{(e)} \\ a_x b_1^{(e)} + a_y c_1^{(e)} & a_x b_2^{(e)} + a_y c_2^{(e)} & a_x b_3^{(e)} + a_y c_3^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$[M^{(e)}]_\tau = \frac{\tau^{(e)} A^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Además, la proyección Π^I del término advectivo se puede expresar en función de $\{U\}$ como:

$$\{\Pi^I\} = [M]_\tau^{-1}\{[k_{OSS}]_C\{U\}\} \quad (51)$$

En general, se puede considerar a la formulación de subescalas ortogonales (OSS) en elementos lineales C^0 , como una formulación SUPG en elementos lineales C^0 , en la que los coeficientes del arreglo $\{U\}$ de incógnitas nodales en los términos segundo y tercero del lado izquierdo de la ecuación (48) se podrían pensar

como perturbaciones de las matrices de advección y de advección-reacción del método SUPG: $[K_{SUPG}]_C$ y $[K_{SUPG}]_{CR}$, respectivamente.

5.2.1. Aspectos de la Implementación de la Técnica de Subescalas Ortogonales. La variable adicional en la formulación Π'_h , es continua entre elementos y, por lo tanto, no se puede considerar a nivel elemental. De acuerdo con esto, si se decidiera realizar una solución monolítica del sistema, esto, implicaría un costo computacional muy grande. El desarrollo que reduce al sistema (47) sugiere un procedimiento de solución iterativo en el que $\{U\}^{(i)}$ se calcula en una primera fase utilizando el valor de la iteración anterior $\{\Pi^I\}^{(i-1)}$. En la segunda fase, la proyección del término advectivo $\{\Pi^I\}^{(i)}$ se resuelve de manera explícita, a partir de la ecuación (51), en función de $\{U\}^{(i)}$ calculado en la fase anterior. El algoritmo iterativo utilizado en la técnica de estabilización OSS para la ecuación advección-difusión-reacción con elementos triangulares lineales de clase C^0 se presenta a continuación:

Resolver a nivel global $\{U\}^{(i)}$:

$$[[k]_D + [k]_C + [k]_R + [k_{SUPG}]_C - [k_{SUPG}]_{CR}^T] \{U\}^{(i)} = \{f\} - [[k_{OSS}]_R - [k_{OSS}]_C^T] \{\Pi^I\}^{(i-1)}$$

Calcular:

$$\{\Pi^I\}^{(i)} = [M]_{\tau}^{-1} \{[k_{OSS}]_C \{U\}^{(i)}\}$$

Efectuar la nueva iteración: $i \leftarrow i + 1$.

(52)

El algoritmo (52) está basado en una versión sobre el mismo dada en [33].

5.2.2. Interpretación de la Técnica de Subescalas Ortogonales como un Alisador del Residuo. Desde que $f - L(u_h)$ es el residuo de la ecuación diferencial original evaluada en $u_h \in V_h$, $r = f - L(u_h)$, entonces se puede reescribir la expresión de subescalas ortogonales como sigue:

$$\tilde{u} = P_{\tau h}^{\perp}(r) \quad (53)$$

Por otro lado, de acuerdo con la definición (45), la ecuación (53) queda como:

$$\tilde{u} = r - P_{\tau h}(r)$$

donde $P_{\tau h}$ es la proyección L^2 en el espacio de elementos finitos, V_h , relacionada con τ . Nótese que el residuo es discontinuo entre elementos ya que su cálculo implica evaluar las dos primeras derivadas de u_h a las que no se les exige continuidad interelemental como u_h misma. Entonces en la técnica de subescalas ortogonales, las subescalas $\tilde{u} \in V_h^{\perp}$ son funciones de la diferencia entre el residuo discontinuo entre elementos y su correspondiente variable continua, $P_{\tau h}(r)$, (alisada) en Ω_h^I .

De acuerdo a lo descrito en el párrafo anterior, a $P_{\tau h}(r)$ se le pide la misma continuidad en Ω_h^I que a u_h . La continuidad de u_h en el interior de cada elemento se garantiza mediante la interpolación:

$$u_h = [v]\{u\}$$

Donde $[v]$ es el arreglo de funciones de forma (polinomiales) que para el caso de los elementos triangulares lineales está representado por una matriz de 1×3 , y $\{u\}$ es el arreglo de variables nodales elementales que tienen el mismo valor a nivel global.

Al exigir a $P_{\tau h}(r)$ la misma continuidad global que a $u_h \in V_h$, entonces esta proyección puede considerarse como una variable nodal $\Pi_h = P_{\tau h}(r)$ cuya continuidad en el interior de cada elemento se asegura utilizando la misma interpolación que para u_h , es decir,

$$\Pi_h = [v]_{\Sigma} \{\Pi\} \quad (54)$$

en donde $[v]_{\Sigma}$ es el arreglo de funciones de forma de ensamblaje global.

Además, si se asume que la variable continua del residuo, $\Pi_h \in V_h$, debe representar, en un sentido de mínimos cuadrados, el residuo actual de elementos finitos, esto implica asumir que Π_h es una proyección L^2 y viceversa, hecho que es cumplido por la técnica de subescalas. El problema de mínimos cuadrados está dado por:

$$\min \left[\int_{\Omega'_{\tau h}} (\Pi_h - r)^T (\Pi_h - r) dV \right] \quad (55)$$

La minimización de la "distancia" $\Pi_h - r$, se debe hacer con respecto a los valores nodales $\{\Pi\}$ ya que r es "constante" en la solución actual de

elementos finitos. Entonces, operando en la ecuación (55), se llega a

$$[M]_{\tau}\{\Pi\} = \{f\}_{r_{\tau}} \quad (56)$$

donde $[M]_{\tau}$ es la matriz de masas global cuya expresión elemental está dada por la ecuación (50) y $\{f\}_{r_{\tau}}$ es un vector global de residuos que tiene una expresión elemental similar a la ecuación (19) del vector fuente.

Por otro lado, tomar a Π_h como la proyección L^2 del residuo implica resolver el siguiente problema: encontrar Π_h , tal que

$$(r - \Pi_h, v)_{\tau} = 0 \quad (57)$$

Esto indica que la distancia $r - \Pi_h$ es ortogonal L^2 al espacio de elementos finitos V_h . De la ecuación (57) se obtiene también (56), por lo que, de acuerdo con esto, queda demostrada la equivalencia entre la minimización cuadrática del residuo y la proyección L^2 de este.

Este tipo de procedimientos (ecuación (56)) conducen a métodos iterativos para el cálculo de $\{\Pi\}$ en función de $f(u_h)$ y el cálculo de $\{U\}$ en función de $\{\Pi\}$, dichos procedimientos iterativos son similares al propuesto al final de la subsección 5.2.1. En [34] se propone un procedimiento similar al descrito en esta subsección para el alisado a posteriori del análisis de elementos finitos de las tensiones o flujos discontinuos entre elementos.

6. Análisis del Error y Estabilidad

En esta sección se realizará un breve resumen de las hipótesis básicas utilizadas para el análisis del error y estabilidad en mallas anisótropas de elementos triangulares C^0 . Esto, con la finalidad de comprender algunos fenómenos que se dan al utilizar las técnicas de estabilización aquí tratadas en problemas con varios grados de anisotropía. Además, se realizará un análisis de las condiciones de estabilidad para la solución obtenida mediante la técnica de subescalas algebraicas (ASGS) [38].

6.1. Hipótesis para la Estimación del Error

Para la estimación del error y la estabilización de los resultados obtenidos al aplicar las técnicas de estabilización consistentes desarrolladas en el

presente artículo, se asumirán las siguientes hipótesis [39]:

Hipótesis 6.1 (Hipótesis de Regularidad (S1)). Se considera una familia regular de triangulaciones Ω'_h , sobre el dominio Ω en estudio, dicha familia se dice regular en el siguiente sentido:

1. Existe una constante σ , tal que, si $\rho^{(e)} = \|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega^{(e)}$, $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$; y \mathbf{y} , \mathbf{z} son dos puntos sobre la bola más grande contenida en $\Omega^{(e)}$,

$$\forall (e) \in \Omega'_h, \quad \frac{h^{(e)}}{\rho^{(e)}} \leq \sigma$$

2. La cantidad

$$h = \max_{(e) \in \Omega'_h} h^{(e)}$$

se aproxima a cero.

Hipótesis 6.2 (S2). Todos los elementos finitos, $(e) \in \Omega'_h$, son afines equivalentes a un único elemento finito de referencia, (\hat{e}) .

Hipótesis 6.3 (S3). Todos los elementos finitos, $(e) \in \Omega'_h$, son de clase C^0 .

Hipótesis 6.4 (Hipótesis Inversa (S4)). Se dice que una familia de triangulaciones satisface una hipótesis inversa, si existe una constante v , tal que

$$\frac{h}{h^{(e)}} \leq v \quad \forall (e) \in \Omega'_h$$

6.2. Estimación del Error Local de Interpolación

Considérese el elemento anisótropo de la Figura 1.

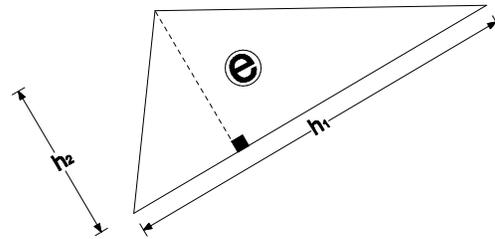


Figura 1. Elemento triangular anisótropo de base h_1 y altura h_2 .

A continuación, se asumirán dos condiciones básicas [40] sobre dicho elemento, y su relación con el dominio, Ω'_h , al que pertenece.

6.2.1. Condición del Máximo Ángulo (2D).

Dada la constante $\Lambda^{(*)} < \pi$ (independiente de h y del tipo de elemento utilizado en la discretización), tal que el máximo ángulo interior $\Lambda^{(e)}$ de cualquier elemento (e) está restringido por $\Lambda^{(*)}$: $\Lambda^{(e)} = \Lambda^{(*)}$.

6.2.2. Condiciones del Sistema de Coordenadas.

El ángulo $\chi^{(e)}$ entre el lado más largo del elemento (e) y del eje x_1 (eje de las abscisas) está restringido por:

$$|\sin(\chi^{(e)})| \leq A \frac{h_2}{h_1}$$

Un crecimiento incontrolable del error de interpolación en elementos degenerados no brinda información sobre el error de aproximación del método de elementos finitos correspondiente. En la literatura, se pueden encontrar ejemplos en los que se considera triángulos con ángulos grandes y en los que el error de interpolación en la norma $W^{1,2}$ (norma H^1) crece hasta el infinito [22].

La condición del sistema de coordenadas se traduce en un alineamiento conveniente de la malla. Del párrafo anterior se concluye que *una condición que es necesaria para una interpolación adecuada puede no ser necesaria para una buena aproximación de elementos finitos.* Por lo tanto, la condición del sistema de coordenadas debe ser tratada cuidadosamente.

6.3. Análisis del Error en la Técnica ASGS

Un ingrediente clave para el análisis del error en malla anisótropa del problema estabilizado es la inecuación inversa anisótropa que puede ser reescrita de la siguiente manera.

$$\|\Delta u_h\|_{L^2(\Omega^{(e)})}^2 \leq \frac{A^2}{h^2} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega^{(e)})}^2 \quad \forall u_h \in V_h \quad (58)$$

Nótese que en el caso en que se utilicen elementos lineales de clase C^0 , se puede asumir que $A = 0$ en la inecuación inversa.

Por otro lado, mediante la aplicación de la norma energética de la ecuación estabilizada mediante la técnica ASGS, y la utilización de la ecuación inversa anisótropa, se obtienen la

siguiente restricción de estabilidad y cota para $\alpha_{\tau^{(e)}}^0(e, v)$ (ver ecuación (60)):

$$(1 - A_1)\tau^{(e)-1} \geq \frac{\varepsilon A^2}{h^2} + \frac{1}{b}s \quad (59)$$

donde $A_1 \geq 0$, y $b > 0$. Nótese que, debido a la naturaleza de los elementos de inecuación (59), para que ésta se mantenga, se debe cumplir que $0 \leq A_1 \leq 1$.

Por último, a continuación, se presenta una cota para $\alpha_{\tau^{(e)}}^0(e, v)$ en términos de una función de la interpolación de error $E(e)$, definida por

$$\begin{aligned} E(e) = & \varepsilon^{1/2} \|\nabla e\|_{L^2(\Omega^{(e)})} + 2\|\tau^{(e)1/2} \mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{L^2(\Omega^{(e)})} + 2\|s^{1/2} e\|_{L^2(\Omega^{(e)})} \\ & + 2\varepsilon\|\tau^{(e)1/2} \Delta e\|_{L^2(\Omega^{(e)})} + \|(\tau^{(e)-1} - s)^{1/2} e\|_{L^2(\Omega^{(e)})} \left\| \frac{\tau^{(e)} s}{s^{1/2}} \mathbf{a} \cdot \nabla e \right\|_{L^2(\Omega^{(e)})} \end{aligned} \quad (60)$$

Lema 6.5. *Supóngase que el parámetro de estabilización satisface la condición (59). Entonces*

$$\| \| e \| \|_{\tau^{(e)}} \leq E(e)$$

y

$$\alpha_{\tau^{(e)}}^0(e, v) \leq E(e) \| \| v \| \|_{\tau^{(e)}} \quad \forall v \in V_h$$

donde, la función $E(e)$, está dada por la ecuación (60).

Teorema 6.6. *Asumiendo que el parámetro de estabilización satisface la condición (59). Entonces*

$$\| \| u - u_h \| \|_{\tau^{(e)}} \leq E(u - \mathfrak{I}^{(e)}u)$$

donde E es la función definida por la ecuación (60), y $\mathfrak{I}^{(e)}$ es el operador de interpolación lineal generalizada para varias dimensiones.

6.3.1. Condición de Estabilidad de la Técnica de Subescalas Algebraicas.

La única condición necesaria para probar la convergencia de la técnica ASGS en el caso anisótropo, es la inecuación (59), que en el caso de elementos lineales de clase C^0 y sólo en el caso de problemas advectivo dominantes; dicha condición se satisface con cualquier definición del parámetro de estabilización.

7. Solución Aproximada de la Ecuación de Subescalas

En esta sección se presenta una solución aproximada de la ecuación (35). Esta ecuación para las subescalas puede pensarse como una ecuación del error. Además, se considera $\tilde{v}^\perp = 0$ (ASGS) ya que esto no afecta la discusión.

La solución aproximada se basa en dos propiedades [38] que dan cuenta de cómo *las subescalas dependen del tamaño característico del elemento*, lo que se determinará mediante la transformación de la ecuación en escala fina al dominio de referencia; y de cómo *las escalas de submalla depende de los coeficientes de la ecuación*, propiedad explicada por medio de un argumento heurístico.

7.1. Transformación al Dominio de Referencia

En lugar de resolver directamente para cada elemento, (e), el problema planteado por las ecuaciones (35) y (36); se transformará este al dominio de referencia. La transformación isoparamétrica se define por una transformación $x = F(\xi)$, que relaciona el elemento, (e), (con coordenadas x) al elemento de referencia, (\hat{e}), (con coordenadas ξ) cuyo Jacobiano, J , verifica que

$$J_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l}, \quad J_{lk}^{-T} = \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \quad (61)$$

Por lo tanto, operando, se puede escribir el problema de escalas finas como

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\varepsilon_{kl}^r \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_l} \right) + \hat{u} \left(a_j \frac{\partial J_{kj}}{\partial \xi_k} + J_{kj} \frac{\partial a_j}{\partial \xi_k} \right) + a_k^r \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_k} + s \hat{u} = r \quad \text{en } \hat{\Omega}^{(e)} \quad (62)$$

donde

$$\varepsilon_{kl}^r = J_{ki} \varepsilon_{ij} J_{lj} \quad (63)$$

y

$$a_k^r = J_{kj} a_j \quad (64)$$

7.2. Un Análisis de Fourier del Problema de Subescalas

Como en [25], considérese la transformada de Fourier de una función v definida en el elemento de referencia (\hat{e}):

$$\hat{v}(\mathbf{p}) = \int_{\hat{\Omega}^{(e)}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}} v(\boldsymbol{\xi}) d\hat{V} \quad (65)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y \mathbf{p} es el vector de número de onda. *Las subescalas \hat{u} son la parte de la solución analítica (continua) que no se puede aproximar por la discretización de elementos finitos. Esto significa que su representación de Fourier será dominada por los componentes con número de onda altos.* Entonces, aplicando algunas propiedades de la transformada de Fourier y operando, se puede reescribir la ecuación (62) como sigue

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^r \cdot \mathbf{p} \hat{u} + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}^r \hat{u} + s \hat{u} = \hat{r}$$

Donde que, se puede reescribir la última ecuación de la siguiente forma

$$\boxed{\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{p}) \hat{u} = \hat{r}} \quad (66)$$

Nótese que

$$\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{p}) := (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^r \cdot \mathbf{p} + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}^r + s) \quad (67)$$

y, despejando \hat{u} de la ecuación (66), se tiene

$$\boxed{\hat{u} = \mathcal{T}(\mathbf{p}) \hat{r}} \quad (68)$$

Finalmente, aplicando el teorema de Plancherel en la ecuación (68) y el teorema del valor medio para la integración, se llega a una expresión para el parámetro de estabilización dada por

$$\boxed{\tau^{(e)} = [(\mathbf{p}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^r \cdot \mathbf{p}^0 + s)^2 + (\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{a}^r)^2]^{-1/2}} \quad (69)$$

donde, \mathbf{p}^0 es el único (dado) vector número de onda en donde se cumple el teorema del valor medio.

7.3. Extensión a Varias Dimensiones: Una Aproximación Anisótropa

Ahora, se considerará la forma dimensional del parámetro de estabilización. Recordando, τ tiene

dimensiones de tiempo $[T]$, dado que las dimensiones de la difusividad, ε , son $[L^2/T]$ y las de vector número de onda, \mathbf{p}^0 , son $[1/L]$; al multiplicar a τ por $\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0$, se obtiene la forma adimensional del parámetro de estabilización, a la que se ha nominado β . De aquí que

$$\beta(\mathbf{p}^0) = \left[\left(1 + \frac{s}{\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{a}^r}{\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (70)$$

La ecuación (70), casi de forma inmediata, sugiere las definiciones generales de los números de Péclet y reacción.

$$Pe_{\mathbf{p}^0} = \frac{|\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{a}^r|}{\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0}, \quad Rc_{\mathbf{p}^0} = \frac{s}{\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0} \quad (71)$$

Entonces, la dirección de la inestabilidad máxima, obtenida del máximo entre $Pe_{\mathbf{p}^0}$ y $Rc_{\mathbf{p}^0}$, se dará por el mínimo valor de β (la dirección de \mathbf{p}^0 que hace que $\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0$ sea mínima). De forma equivalente, se puede definir la dirección de la máxima inestabilidad, \mathbf{p}_I^0 , como:

$$\mathbf{p}_I^0 = \arg \left[\max_{\|\mathbf{p}^0\|=1} \left(\frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (72)$$

Entonces, el parámetro de estabilización, está dado por $\tau(\mathbf{p}_I^0)$; por lo que de la expresión general del parámetro de estabilización (69), se obtiene:

$$\tau = \tau(\mathbf{p}_I^0) = \left[(\mathbf{p}_I^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}_I^0 + s)^2 + (\mathbf{p}_I^0 \cdot \mathbf{a}^r)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (73)$$

7.3.1. Cálculo Computacional de la Direcciones de (\mathbf{p}_I^0) . La definición (72) implica la maximización de la función

$$H(\mathbf{p}^0) = \frac{1}{\beta} = \left[\left(1 + \frac{s}{\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{a}^r}{\mathbf{p}^0 \cdot \varepsilon^r \cdot \mathbf{p}^0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pero la función raíz cuadrada es monótona, luego, se puede resolver un problema equivalente maximizando $H^2(\mathbf{p}^0)$. Nótese, que debido a que \mathbf{p}^0 es un autovector normalizado, es decir, $\|\mathbf{p}^0\| = 1$; se concluye que el máximo de la función $H(\mathbf{p}^0)$ siempre ocurre en algún lugar entre la dirección de la mínima difusión y la dirección de \mathbf{a}^r . De acuerdo con esto, en la práctica se podría encontrar dicho máximo tan

solo con evaluar $H(\mathbf{p}^0)$ en un número dado de puntos entre esas dos direcciones.

8. Comentarios y Conclusiones

En esta sección se realizan algunos comentarios y conclusiones importantes sobre los desarrollos, análisis, e interpretaciones realizados para el problema de advección-difusión-reacción, al estabilizarlo por las diferentes técnicas consistentes aplicadas al método de elementos finitos.

1. La orientación de la malla altera la solución, y en algunos casos en forma significativa. Esto se produce con mayor frecuencia en mallas groseras. La explicación de este fenómeno está vinculada con la estrecha relación que guardan los coeficientes (ε , \mathbf{a} y s) de la ecuación de advección-difusión-reacción y las condiciones de Máximo Ángulo 6.2.1 y del Sistema de Coordenadas 6.2.2, que cada elemento debe satisfacer aún en mallas anisótropas (ver comentario 3).
2. Cuando se realiza la solución del caso advectivo dominante de la ecuación ADR (1) mediante las técnicas SUPG, GLS y ASGS; dicha solución, en general, es muy similar tanto en mallas isotropas como anisótropa. Esta similitud de las soluciones se debe a que si el problema es advectivo dominante y la discretización se realiza con elementos lineales, el operador $\mathcal{P}(v)$ de las técnicas GLS y ASGS es igual al de la técnica SUPG (ver ecuación (23)). Esto da, para los tres casos, el siguiente sistema matricial:

$$\begin{aligned} & \left[[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k_{SUPG}^{(e)}]_C \right] \{u^{(e)}\} \\ & = \{f^{(e)}\} + \{f_{SUPG}^{(e)}\} \end{aligned}$$

En el caso de la técnica OSS, si el problema es advectivo dominante y la discretización se realiza con elementos lineales, el operador $\mathcal{P}(v)$ es también igual al de la técnica SUPG, por lo que la solución mediante este método es similar a la solución SUPG (y por lo tanto a las soluciones GLS y ASGS), sin embargo, no es igual. De hecho es una solución alisada de la SUPG. Esto se puede apreciar en el sistema matricial de la técnica OSS obtenido para el caso advectivo dominante y dado por

$$\begin{aligned} & [[k]_D + [k]_C + [k_{SUPG}]_C] \{U\}^{(i)} \\ & = \{f\} [k_{OSS}]_C^T [M]_\tau^{-1} [k_{OSS}]_C + \{U\}^{(i-1)} \end{aligned}$$

Nótese que el término $[k_{OSS}]_C^T [M]_\tau^{-1} [k_{OSS}]_C \{U\}^{(i-1)}$, al lado derecho de la última ecuación, corresponde al alisado del residuo, $r = f - L(u_h)$, consecuencia de la discretización de elementos finitos de este tipo de problemas; dicho término se podría considerar como un pseudo vector fuente SUPG, que, en este caso, alisa la solución en cada iteración. Por esto la solución OSS es similar (en los problemas advectivos dominantes) a la solución obtenida por las demás técnicas de estabilización, pero más lisa. Dicho alisado se puede notar con mayor claridad en problemas advectivos dominantes en donde el término fuente es nulo ($f = 0$). Para este caso, la ecuación matricial de las técnicas SUPG, GLS y ASGS queda:

$$[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k_{SUPG}^{(e)}]_C \{u^{(e)}\} = \{0\}$$

En cambio, la ecuación matricial del OSS se reescribe así:

$$\begin{aligned} & [k]_D + [k]_C + [k_{SUPG}]_C \{U\}^{(i)} \\ & = [k_{OSS}]_C^T [M]_\tau^{-1} [k_{OSS}]_C \{U\}^{(i-1)} \end{aligned}$$

En donde el término del lado derecho actúa como un vector de término fuente que alisa la solución.

3. En algunos problemas con advección dominante, la anisotropía de la malla casi no afecta a las técnicas de estabilización. Esto parece estar vinculado con la dirección, sentido y magnitud con las que el campo advectivo atraviesa el dominio, Ω , en estudio y con el tipo de anisotropía de la malla. Lo que sugiere, entonces, hablar sobre una forma más general de anisotropía vinculada ahora no solamente con la malla, sino con el problema discreto mismo, dicha forma general de la anisotropía se basa en la posición relativa de cada elemento con relación a la dirección del campo advectivo y de la posición de unos elementos con respecto a otros (alineamiento de los elementos). Esto queda explícito al analizar la expresión (73) obtenida para el parámetro de estabilización, τ , aplicado a mallas anisótropas en el que se calcula una

dirección, \mathbf{p}_l^0 , en la que la difusión es mínima. Esta dirección está relacionada con los coeficientes ε , \mathbf{a} , s de la ecuación de advección-difusión-reacción y con la dirección misma del campo advectivo en cada elemento sobre la que se imponen las condiciones de Máximo Ángulo 6.2.1 y del Sistema de Coordenadas 6.2.2, que cada elemento debe satisfacer aún en mallas anisótropas. Estas condiciones que debe cumplir la malla en relación a sus propios elementos y a los coeficientes de la ecuación de advección-difusión-reacción, ayudan a entender el por qué en ciertos casos no se consigue estabilizar la solución (con ninguna de las técnicas desarrolladas en el presente artículo) incluso al aplicar la expresión (73) obtenida para el parámetro de estabilización, τ , de mallas anisótropas; dado que la anisotropía del problema discreto no cumple correctamente con las condiciones de máximo ángulo y del sistema de coordenadas.

4. En los problemas con reacción dominante, la técnica ASGS es la única con la que se obtienen, en mallas isotrópicas y anisótropas, soluciones estables y de aproximación aceptable con respecto a lo que sería una solución exacta. En este tipo de problemas, las técnicas SUPG y GLS no estabilizan al método de Galerkin estándar, por lo que las soluciones son las mismas que las encontradas con este último. Esto ocurre, ya que, en problemas con reacción dominante discretizados con elementos lineales, el operador $\mathcal{P}(v)$ se anula en la técnica SUPG (ver ecuación (23)), dando como resultado un sistema matricial igual al del Galerkin estándar (ver ecuaciones: (24) y (20)). Las técnicas GLS y ASGS, en éste caso producen los siguientes sistemas matriciales (ver ecuaciones: (29) y (42)):

$$[[k^{(e)}]_D + (1 + \tau s)[k^{(e)}]_R] \{u^{(e)}\} = (1 + \tau s) \{f^{(e)}\}$$

y

$$[[k^{(e)}]_D + (1 - \tau s)[k^{(e)}]_R] \{u^{(e)}\} = (1 - \tau s) \{f^{(e)}\}$$

respectivamente. Sin embargo, como se mencionó, la técnica GLS no estabiliza el problema reactivo, lo que parece estar ligado a la sobre reactividad (lado izquierdo de la ecuación matricial) introducida por el coeficiente $(1 + \tau s)$; que no sucede en la técnica ASGS cuyo coeficiente $(1 - \tau s)$ es,

por lo tanto, subreactivo (lado izquierdo de la ecuación matricial).

En el caso de la técnica OSS, la ecuación matricial obtenida para problemas reactivo dominantes discretizados con mallas de elementos lineales es

$$[[k]_D + [k]_C + [k]_R]\{U\} = \{f\}$$

que es igual a la ecuación matricial del método estándar de Galerkin, es decir, al igual que el método SUPG, el método OSS no estabiliza al método de Galerkin en problemas reactivo dominantes discretizados con elementos lineales; sin embargo, cabe recalcar que se han desarrollado métodos que modifican a la técnica OSS para obtener resultados óptimos en problemas con reacción dominante.

5. En los casos advectivo-reactivos discretizados con elementos lineales, las cuatro técnicas (SUPG, GLS, ASGS y OSS) estabilizan el método estándar de Galerkin, siendo la técnica OSS la que brinda una solución más cercana a la analítica. Por su parte, la técnica ASGS posee la solución menos difusiva entre las cuatro en mención, siendo ésta estable pero de mala calidad. Esto se debe a que como se puede observar en las siguientes ecuaciones, la técnica GLS contiene una matriz simétrica advectivo-reactiva de estabilización, en cambio la técnica ASGS contiene una matriz antisimétrica (sin parte volumétrica, difusiva) advectivo-reactiva de estabilización. Esto se traduce en que, mientras la técnica GLS agrega advección-reacción (reacción y difusividad) al mismo problema base. Los sistemas matriciales obtenidos, en este caso, para las técnicas SUPG, GLS y ASGS son los dados por las ecuaciones (24), (29) y (42), respectivamente. A continuación se presenta una comparación entre los términos de las ecuaciones matriciales de las cuatro técnicas con respecto a la técnica SUPG.

* **Técnica SUPG**

$$[[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k_{SUPG}^{(e)}]_C + [k^{(e)}]_R + [k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}]\{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\} + \{f_{SUPG}^{(e)}\}$$

* **Técnica GLS**

$$\underbrace{[[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k_{SUPG}^{(e)}]_C + [k^{(e)}]_R + [k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}]}_{SUPG}\{u^{(e)}\} + \left[[k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}^T + \tau s [k^{(e)}]_R \right] \{u^{(e)}\} = \underbrace{\{f^{(e)}\} + \{f_{SUPG}^{(e)}\}}_{SUPG} + \tau s \{f^{(e)}\}$$

* **Técnica ASGS**

$$\underbrace{[[k^{(e)}]_D + [k^{(e)}]_C + [k_{SUPG}^{(e)}]_C + [k^{(e)}]_R + [k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}]}_{SUPG}\{u^{(e)}\} - \left[[k_{SUPG}^{(e)}]_{CR}^T - \tau s [k^{(e)}]_R \right] \{u^{(e)}\} = \underbrace{\{f^{(e)}\} + \{f_{SUPG}^{(e)}\}}_{SUPG} - \tau s \{f^{(e)}\}$$

* **Técnica OSS**

$$\underbrace{[[k]_D + [k]_C + [k]_R]\{U\}}_{\text{Galerkin Estándar}} + \underbrace{[[k_{SUPG}]_C - [k_{SUPG}]_R^T [M]^{-1} [k_{OSS}]_C]}_{\text{Término advectivo SUPG perturbado}}\{U\} - \underbrace{[[k_{SUPG}]_{CR}^T - [k_{OSS}]_R [M]^{-1} [k_{OSS}]_C]}_{\text{Término advectivo-reactivo SUPG perturbado}}\{U\} = \underbrace{\{f\}}_{\text{Galerkin Estándar}}$$

Nótese que las técnicas GLS y ASGS contienen en su totalidad a la SUPG. En cambio, la técnica OSS es en sí una forma perturbada de la técnica SUPG. De acuerdo con los resultados, la perturbación OSS de la matriz advectivo-reactiva de la técnica SUPG muestra una mejor eficiencia que la simetrización GLS de la misma matriz.

8.1. Sobre las Bondades de las Técnicas de Estabilización Desarrolladas

Como resumen de todo lo dicho en los comentarios y conclusiones dadas hasta aquí, se presenta las siguientes conclusiones breves.

- **Problemas Advectivo Dominantes.** Todas las técnicas de estabilización (SUPG, GLS, ASGS y OSS) muestran un buen desempeño y soluciones similares, considerando que la técnica OSS brinda soluciones más lisas y estables en este tipo de problemas, de donde se concluye que esta sería la primera opción en la que se debería pensar en lo que a estabilización de problemas de advección dominante respectiva.
- **Problemas Reactivo Dominantes.** En este tipo de problemas, la única técnica con la que se consigue soluciones que se pueden considerar como óptimas es la ASGS (con

la otras técnicas no se consigue estabilizar este tipo de problemas).

- **Problemas Advectivo Reactivos.** En estos problemas se obtienen buenos resultados con las técnicas GLS y OSS, sin embargo cabe destacar que es posible obtener una mejor calidad de las soluciones con la técnica OSS, de donde se concluye que esta debería ser la técnica a utilizar en la solución de este tipo de problemas.

8.2. Interpretación de las Técnicas de Subescalas

De las definiciones de las técnicas de subescalas ASGS y OSS desarrolladas en el presente artículo, se concluye que la técnica ASGS considera que todas las escalas que no se toman en cuenta en la discretización de elementos finitos estándar (Galerkin), y que son las que producen la inestabilidad en dicha solución, están únicamente a nivel elemental; mientras que la técnica OSS considera que las escalas no tomadas en cuenta en la solución estándar de elementos finitos, están también a nivel elemental, pero además, existen otras escalas no tomadas en cuenta debidas a la partición (discretización) del dominio (nivel global). Esto implica que el OSS introduce, en general, más grados de libertad, lo que hace que las soluciones obtenidas mediante esta técnica sean más caras, en el sentido computacional, que las obtenidas con las otras técnicas (SUPG, GLS y ASGS).

8.3. Aportes Realizados

- Obtención de las expresiones de las matrices de difusión, advección, reacción, advección-reacción y vectores fuente para elementos triangulares lineales de clase C^0 de todas las técnicas aquí tratadas.
- Comparación teórica de la formulación estándar de elementos finitos y las técnicas SUPG, GLS, ASGS y OSS con respecto a la técnica SUPG (desarrollo generalizado de las técnicas aquí tratadas en torno a la técnica SUPG, pionera de las técnicas de estabilización consistentes).
- Interpretación unificada de todas las técnicas de estabilización desarrolladas aquí desarrolladas.

- Interpretación de la técnica de subescalas ortogonales como un alisador del residuo.
- Desarrollo sistemático de la teoría básica para el análisis del error y estabilidad en mallas isotropas y anisotropas.

Referencias

- [1] F. Brezzi, M.O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet, and G. Rogé. A relationship between stabilized finite element methods and Galerkin method with bubble functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96:117-129, 1992.
- [2] O. Pironneau, J. Liou, and T. Tezduyar. Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100:117-141, 1992.
- [3] J. Donea. A Taylor-Galerkin method for convection transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:101-119, 1984.
- [4] C. Johnson. *Numerical Solution of partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.
- [5] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stoke equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199-259, 1982.
- [6] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stoke problem accommodating equal-order interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59:85-99, 1986.
- [7] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and G.M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:173-189, 1989.
- [8] J. Douglas and J. Wang. A absolutely stabilized finite element method.

- Mathematics of Computation, 52:495-508, 1989.
- [9] L.P. Franca, S.L. Frey, and T.J.R. Hughes. Stabilized finite element methods: I. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 95:253-276, 1992.
- [10] T.J.R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58:305-328, 1986.
- [11] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 127:387-401, 1995.
- [12] T.J.R. Hughes and A.N. Brooks. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. In T.J.R. Hughes, editor, *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, page 19-35. ASME, New York (USA), 1979.
- [13] T.J.R. Hughes and A.N. Brooks. A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure. In R.H. Gallagher, D.H. Norrie, J.T. Oden and O.C. Zienkiewicz, editor, *Finite Element in Fluids*, Vol. 4, Selected papers from the Third International Conference on Finite Elements in Flow Problems, Banff, Alberta, Canada, June 10-13, 1980, pages 47-65. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [14] D.W. Kelly, S. Nakasawa, O.C. Zienkiewicz and J.C. Heinrich. A note of upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1705-1711, 1980.
- [15] F. Sahnib, T.J.R. Hughes and Z. Johan. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. The compressible Euler and Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89:141-219, 1991.
- [16] T.J.R. Hughes, G.R. Feijóo, L. Mazzei and J. Quincy. The variational multiscale method method: a paradigm for computational mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 166:3-24, 1998.
- [17] L. Franca and A. Macedo. A two-level finite element method and its application to the Helmholtz equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43:23-33, 1998.
- [18] L.Franca, A. Nesliturk and M. Stynes. On the stability of residual-free bubbles for convection-diffusion problems and their approximation by a two-level finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 166:35-49, 1998.
- [19] R. Codina. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 156:185-210, 1998.
- [20] C.A. Taylor, T.J.R. Hughes and C.K. Zarins. Finite element modeling of blood flow in arteries. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 158:155-196, 1998.
- [21] R. Codina, E. Oñate and M. Cervera. The intrinsic time for the streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation using quadratic elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 94:239-262, 1992.
- [22] I. Babuška and A.K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 13:214-226, 1976.
- [23] R. Codina. Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:1579-1599, 2000.
- [24] R. Codina and J. Blasco. Analysis of a stabilized finite element approximation of the transient convection-diffusion-reaction equation using orthogonal subscales. Computing and Visualization in Science, 3:167-174, 2001.
- [25] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191: 4295-4321, 2002.

- [26] M. Ainsworth and J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Series of Text, Monographs and Tracts, John Wiley & Sons, 2000.
- [27] A. ElSheikh, S. Chidiac and W. Smith. A posteriori error estimation based on numerical realization of the variational multiscale method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:3637-3656, 2008.
- [28] G. Hauke, M.H. Doweidar and M. Miana. The multiscale approach to error estimation and adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:1573-1593, 2006.
- [29] G. Hauke, D. Fuster and M. Doweidar. The multiscale approach to error estimation and adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008.
- [30] C.H. Whiting and K.E. Jansen. A stabilized finite element method for the incompressible navier-stokes equations using a hierarchical basis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35:93-116, 2001.
- [31] V. Calo. *Residual based multiscale turbulence modeling: finite volume simulations of bypass transition*. PhD thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, Stanford University, 2004.
- [32] S. Mital. On the performance of high aspect ratio elements for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:269-287, 2000.
- [33] Q. Valverde. *Elementos Estabilizados de Bajo Orden en Mecánica de Sólidos*. Tesis de PhD, Departament Resistència de Materials i Estructures a L'enginyeria, Universitat Politècnica de Catalunya, 2003.
- [34] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*, fifth edition. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [35] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, 1997.
- [36] G. Houzeaux. *A Geometrical Domain Decomposition Method in Computational Fluid Dynamic*. Tesis de PhD, Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, 2002.
- [37] J. Donea, A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons, Ltd., 2003.
- [38] J. Principe. *Subgrid scale stabilized finite elements for low speed flows*. Tesis de PhD, Departament Resistència de Materials i Estructures a L'enginyeria, Universitat Politècnica de Catalunya, 2008.
- [39] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM Classics In Applied Mathematics Vol. 40, 2002.
- [40] T. Apel and G. Lube. *Local inequalities for anisotropic finite elements and their application to convection-diffusion problems*. Preprint, Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz-Zwickau, 1995.
- [41] A. Jerves. *Análisis del Modelo de Advección-Difusión-Reacción por Subescalas Ortogonales*. Universidad Politècnica Salesiana, 2009