

# Optimización del Reabastecimiento de una Red de Cajeros Automáticos con Estimación Difusa de la Demanda

Ing. Ramiro Saltos Atiencia, Dr. Ricardo Aceves García

Universidad Nacional Autónoma de México  
División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería  
Sección de Investigación de Operaciones  
[ramirojsaltos@hotmail.com](mailto:ramirojsaltos@hotmail.com)  
[aceves@unam.mx](mailto:aceves@unam.mx)

**Resumen.** En el presente trabajo, se ha formulado un nuevo modelo matemático para el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés), el cual considera que la información referente a la demanda de los clientes de la red es ambigua e imprecisa por medio de la utilización de números difusos. Este modelo matemático es relevante debido a sus múltiples aplicaciones en contextos logísticos de inventario manejado por el proveedor (VMI por sus siglas en inglés), tales como reabastecimiento de cajeros automáticos, recolección de residuos peligrosos en hospitales, distribución de bienes en servicios de autoventa, entre otros. Finalmente, se ha propuesto un método para resolver el modelo planteado a través de la utilización de los enfoques más conocidos en la literatura científica hasta la fecha.

**Palabras Clave:** Imprecisión de la Información, Ambigüedad, Números Difusos, Logística.

## 1. Introducción

La consolidación de la industria y los retos económicos actuales, siguen poniendo presión en la industria bancaria, en especial, en el sector de los cajeros automáticos, donde los efectos han sido percibidos de varias maneras. Para algunas empresas, las bajas tasas de interés sobre el dinero en efectivo han abierto nuevas puertas, esto es, les ha permitido expandirse en el mercado a través de ubicar nuevos cajeros en su red, mientras que para otras, los márgenes de las utilidades han colapsado, teniendo que vender este servicio a empresas más grandes.

Operar una red de cajeros automáticos exige el manejo integrado de varios temas tales como: el monitoreo remoto, la interconexión en tiempo real con la institución bancaria del cliente que hace uso del cajero, pronósticos de la demanda en cada cajero, políticas de abastecimiento y consideraciones generales de seguridad para evitar robos, fraudes, etc. Por lo anterior, administrar este tipo de redes es una tarea bastante compleja, siendo necesario el uso de herramientas sofisticadas de apoyo tecnológico para poder tomar las mejores decisiones posibles en un mundo globalizado, donde las pequeñas ventajas y ahorros que se logren, pueden ser la diferencia entre seguir en el mercado o salir de él.

Por ello, las instituciones financieras y aquellas que operan en la industria de los cajeros automáticos, cotidianamente se enfrentan a un problema de índole operativo que debe ser resuelto por las personas competentes en el menor tiempo posible. Este equipo de trabajo tiene a su cargo una red de cajeros automáticos dispersa por toda la ciudad o zona geográfica de interés, influyendo sobre ella, una gran cantidad de factores económicos, sociales y jurídicos. El equipo de trabajo deberá elaborar una política de reabastecimiento para su red de cajeros que considere de manera integral las decisiones asociadas con el nivel

de inventario guardado en cada cajero y las rutas de distribución que se utilizarán para abastecerlos dentro de un horizonte de tiempo determinado considerando todas las limitantes posibles. Adicionalmente, deben incorporar dentro del modelo que desarrollen, la incertidumbre que rodea a la demanda de los cajeros automáticos, la cual se propone sea considerada a través de la teoría de los números difusos. El tipo de problema que se aborda, sin considerar la incertidumbre de la demanda, suele ser conocido en la literatura científica como el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés).

## 2. Descripción del Problema

Desde el punto de vista logístico, existen dos grandes tipos de costos en el mantenimiento y operación de una red de cajeros automáticos: los costos relacionados con el manejo de efectivo y los costos de equipo e infraestructura. El primero de ellos hace referencia a los costos de reaprovisionamiento, costos del dinero en el tiempo y costos administrativos, llegando a ser por lo menos, una tercera parte de los costos totales de operación (Ver Figura 1). Por otro lado, los costos de equipo e infraestructura, están relacionados con la inversión por instalar un nuevo cajero, por las operaciones de mantenimiento, la depreciación del activo, las telecomunicaciones, entre otros [1].

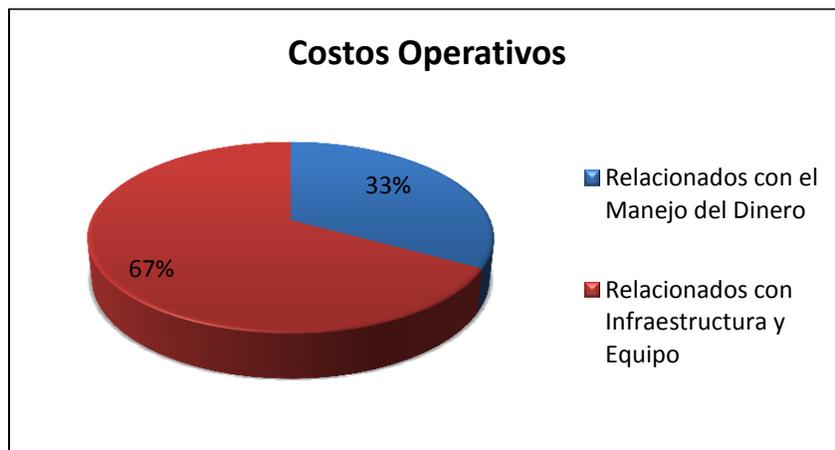


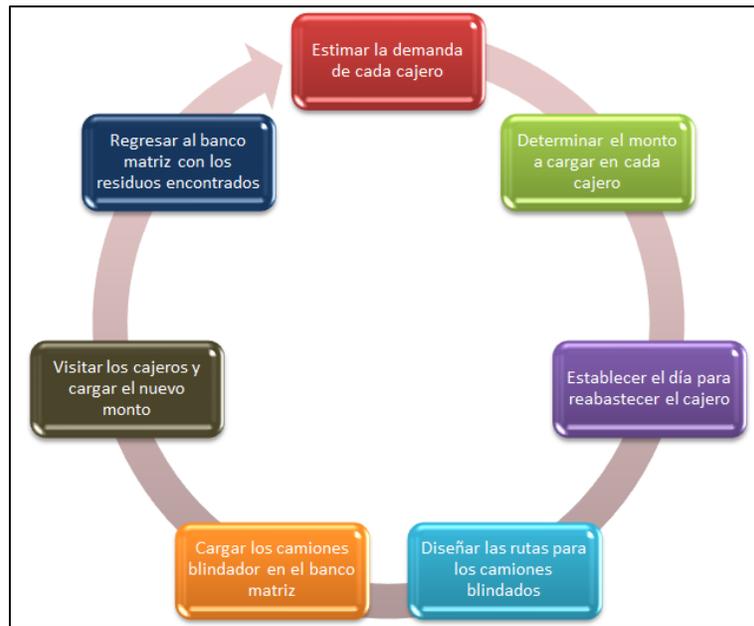
Figura 1: Tipos de Costos Operativos de una Red de Cajeros Automáticos

Dado que los costos relacionados con el manejo de efectivo, dependen esencialmente de la política de inventario que se diseñe y representan un gran porcentaje de los costos totales de operación de la red de cajeros automáticos y, considerando que uno de los principales problemas logísticos a resolver dentro de la administración de este efectivo, es el reabastecimiento de los mismos, el cual tiene estrecha relación con el costo de oportunidad del dinero, se hace necesario desarrollar políticas óptimas de aprovisionamiento que permitan disminuir los costos de oportunidad, inventario, distribución y nivel de servicio de la red.

### 2.1. Proceso de Reabastecimiento

Usualmente, por las políticas de seguridad establecidas en los bancos, el proceso de reabastecer los cajeros automáticos inicia en el banco matriz de la institución financiera donde los camiones blindados, sean propios o contratados, llegan a recoger los bultos de dinero ya empacados para ser trasladados a los respectivos cajeros. Para cada cajero hay un bulto asignado con el monto respectivo a ser cargado, esto se debe a que los riesgos que se incurren en el traslado de valores, no permiten a los ejecutivos del banco perder tiempo en contar el dinero que van a liberar en el cajero en el momento que arriban. Una vez que el camión llega al cajero, el ejecutivo del banco abre la bóveda de la máquina, revisa que los niveles de inventario en el cajero coincidan con los registrados en el sistema, procede a retirar ese dinero (según lo sugerido en [2]) y a cargar el nuevo monto en las ranuras dispensadoras así como registra el nuevo nivel de inventario en el sistema del

cajero. Al final del proceso el camión blindado regresa al banco matriz, llevando los residuos de efectivo que se encontraron en cada cajero de su ruta (Ver Figura 2).



**Figura 2: Proceso de Reabastecimiento de las Redes de Cajeros Automáticos**

El primer inconveniente que sobresale del procedimiento anterior radica en que los residuos de dinero presentes en los cajeros, son llevados de regreso al banco matriz, con lo cual se incurren en gastos de procesamiento y traslado de dichos valores, cuando pudieron quedarse en la bóveda del cajero y el nuevo nivel de inventario ser establecido con base al nivel anterior a la recarga del mismo.

Otros inconvenientes están relacionados con la forma según la cual se estima los montos de efectivo a cargar en cada cajero y al procedimiento usado para establecer la hoja de ruta de cada camión blindado. El primero de estos, suele estar basado en los pronósticos de la demanda de cada cajero realizados por el banco, mientras que el segundo, está relacionado con la experiencia del conductor y su conocimiento sobre la red de vialidades, de tal forma, que le permitan reducir el tiempo de recorrido total.

Como se mencionará más adelante, la demanda de un cajero automático depende de muchos factores, tanto cualitativos como cuantitativos, los cuales hacen que su estimación sea un problema difícil de resolver, como el que se abordará en esta investigación. Por este motivo, un gran número de instituciones bancarias optan por estimar la demanda de sus cajeros usando métodos simples y rápidos que no ofrecen un alto nivel de confiabilidad, y en otros casos, simplemente se utiliza la estimación hecha por el administrador de la red basada en su experiencia previa.

Y es en este punto cuando se requiere de una técnica o herramienta que nos permita realizar una estimación de la demanda que considere que la información referente a la misma es ambigua (del tipo “es aproximadamente igual a”), no se tienen los suficientes datos para realizar un pronóstico confiable, o simplemente el comportamiento de ella es demasiado variable y dependiente de muchos factores, lo cual hace prácticamente imposible establecer una predicción acertada.

Dado que las redes de cajeros automáticos son monitoreadas en tiempo real y la información referente a los movimientos de efectivo se almacena en una base de datos, se dispone de una gran cantidad de información histórica sobre el comportamiento de la demanda, en cada uno de los cajeros de la red, sin embargo, como se

menciona en [1], la demanda de efectivo es muy variable, lo cual imposibilita el poder hacer pronósticos confiables o ajustarla a una distribución de probabilidad. Por este motivo, y como el objetivo de los pronósticos es construir una capacidad de respuesta, se utilizará la teoría de los números difusos para estimar la demanda de efectivo y así, construir estrategias óptimas de reabastecimiento que cumplan con el objetivo principal de cualquier institución bancaria, responder ante las variaciones de la demanda de sus cajeros sin perder la calidad del servicio y minimizando los costos.

Una política de aprovisionamiento para las redes de cajeros automáticos bien desarrollada debe permitir al administrador de la red contestar de forma integral las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles y cuándo reabastecer los cajeros automáticos?
- ¿Qué monto cargar en los cajeros automáticos?
- ¿Cuáles serán las rutas que recorrerá el camión blindado?

Y relacionadas a éstas preguntas tenemos los siguientes costos:

- **Costo del Dinero:** Referente al costo de oportunidad por tener el dinero guardado y relacionado directamente con las tasas de interés.
- **Costo de Cargar el Dinero:** Referente al costo que pagamos a la empresa que nos ofrece el servicio de ir al cajero y cargar el dinero en el mismo. Suele estar relacionado con la longitud de las rutas que recorre el camión en el proceso de abastecimiento.

En la práctica, las empresas sólo perciben los costos directos, en este caso, los costos por cargar el dinero y no perciben los costos ocultos, como el que se incurre por tener guardado el efectivo en el cajero, pudiendo ser utilizado en otro tipo de inversiones que permitan a la institución expandirse. Por lo anterior, las instituciones bancarias en su mayoría, desarrollan políticas para el manejo del efectivo en los cajeros automáticos, que reducen los costos operativos relacionados con el aprovisionamiento y no los relacionados con el inventario guardado. Prueba de esto, las instituciones financieras tienen circulando en las redes de cajeros automáticos, al menos un 40% más dinero en efectivo del que realmente se necesita [3].

Usualmente, los enfoques más usados para afrontar el problema tratado en este trabajo consisten en contestar cada una de las preguntas arriba mencionadas individualmente, debido a que la respuesta de cada una de ellas se obtiene resolviendo problemas independientes, sin considerar el problema global. La desventaja de resolver cada problema por separado, radica en la pérdida de las relaciones que existen entre los componentes del sistema global, lo cual nos lleva a soluciones de menor calidad que las que se obtendrían si se resuelve el problema de una forma integral.

Por el gran nivel de dificultad que existe en el desarrollo de una política optimizada de reabastecimiento para los cajeros automáticos, un gran número de empresas optan por elaborar soluciones basadas generalmente en procedimientos ya establecidos. Un ejemplo es, la utilizada por la empresa de correos mencionada en [4], la cual consiste en:

- Garantizar el 100% de disponibilidad de dinero en los cajeros.
- Recargar el cajero al menos dos veces por semana.
- Evitar dos o más alertas del sistema en una semana, para evitar quedarse sin dinero.

Otro tipo de estrategias de solución establecen periodos fijos de reabastecimiento, es decir, se fijan días de la semana en los cuales se irá recargar el cajero hasta llenarlo completamente.

Las principales desventajas al utilizar este tipo de métodos para reabastecer los cajeros automáticos radican en: los altos costos de oportunidad en que se incurre, no necesariamente se garantiza la disponibilidad total de efectivo en los mismos, lo cual implica que no se cumple ni con la demanda ni con las expectativas que tienen

los clientes sobre la calidad del servicio, y en la pérdida de inversiones potenciales que permitirían a la institución bancaria crecer.

### **3. Estado del Arte**

Existen varios tipos de decisiones a tomar relacionadas con la administración de las redes de cajeros automáticos, sin embargo, las dos principalmente relacionadas con el presente trabajo son:

- Pronóstico de la demanda.
- Decisiones sobre abastecimiento de dinero en efectivo.

#### **3.1. Pronóstico de la Demanda**

Uno de los problemas más importantes en la administración de las redes de cajeros automáticos y que juega un papel fundamental para poder determinar la política óptima de abastecimiento, es el pronóstico de la demanda.

La demanda de un cajero automático depende de muchos factores, tanto cuantitativos como cualitativos. Entre los factores cuantitativos tenemos el día de la semana, el día del mes, el mes, el año, etc. Para ejemplificar esto, la demanda de efectivo no se comporta igual un lunes que un domingo, en quincena y fin de mes que en cualquier otro día, en diciembre que en julio y en junio de un año cualquiera que en junio del año que se celebra el mundial de fútbol.

Entre los factores cualitativos tenemos los relacionados con: el sector donde se ubica el cajero, el estrato económico de las personas que viven cerca del cajero, el comportamiento de los usuarios, etc. Ejemplificando, tenemos que el cajero ubicado en un centro comercial no tiene los mismos niveles de demanda que un cajero ubicado en un sector no comercial, las personas de estrato económico alto retiraran montos de dinero superiores que las personas de estrato económico medio o bajo, etc. Para finalizar, el comportamiento de la demanda no depende únicamente de éstos factores de forma aislada, sino que existen interacciones entre ellos que complican su pronóstico.

Dada la gran complejidad que existe en torno al pronóstico de la demanda de los cajeros automáticos, en las referencias [3], [4], [5], [6], [7] y [8] el lector podrá encontrar diferentes modelos y algoritmos desarrollados para establecer una predicción confiable de la misma. Muchos de estos trabajos están basados en el uso de redes neuronales artificiales y algoritmos genéticos, estableciendo un monto a cargar en cada cajero automático a partir de los resultados obtenidos.

#### **3.2. Decisiones sobre Reabastecimiento**

Sin duda alguna, el aspecto más significativo en la operación de las redes de cajeros automáticos tiene que ver con el reaprovisionamiento del efectivo en los mismos. Esto se debe a que si un cajero no tiene dinero cuando el cliente lo requiera, éste pierde la confianza en el servicio ofrecido y desmejora la imagen del banco al cual pertenece. A esto le podemos agregar los ingresos que se dejan de percibir por las transacciones no atendidas y los gastos que se incurrirán por tener un cajero en funcionamiento (costos de electricidad, renta del espacio, etc.), que no está cumpliendo las expectativas de servicio deseadas.

Sin embargo, a pesar de la importancia de este aspecto, no existen muchos estudios publicados referentes al mismo, en los que se considere de forma integral, la política de inventario con la estrategia de ruteo para reaprovisionar los cajeros. En este contexto, el único trabajo que considera las dos vertientes del problema es el referenciado en [1], en el cual se hace un extenso estudio teórico de los costos logísticos asociados a la operación, para al final mencionar un modelo matemático para resolver el problema, considerando un entorno determinístico para el comportamiento de la demanda a través del tiempo, e implementándolo en el modelizador AMPL con una instancia de 10 cajeros automáticos en la red.

El modelo propuesto en la referencia [1], corresponde a la formulación del Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés), el cual estudiaremos más adelante, siendo este un problema computacionalmente tan difícil de resolver que, para situaciones de gran escala, es necesario el uso de métodos heurísticos, puros o hibridizados, que permitan obtener buenas soluciones en un tiempo de procesamiento aceptable.

Otro estudio que cabe mencionar es el referenciado en [9], el cual propone, analiza y resuelve numéricamente tres modelos de programación matemática estocástica, para establecer el monto a cargar en los cajeros automáticos. En la investigación referenciada se establecen los siguientes supuestos:

- Se conoce la distribución de probabilidad de la demanda de los cajeros.
- Se establecen periodos fijos de aprovisionamiento.
- Se pueden o no considerar costos fijos por aprovisionar.
- El tiempo que transcurre desde que se solicita el reabastecimiento del cajero hasta que se lo reabastece (lead-time en inglés) se asume constante e igual a cero.

Supuestos que simplifican demasiado la problemática real, en la cual, es muy difícil conocer con certeza la distribución de probabilidad de la demanda para cada cajero y que, el lead-time sea igual a cero. Por lo que se hace necesario contar con nuevas estrategias para estimar la demanda que permitan desarrollar políticas de operación acordes con la complejidad del problema.

## 4. Teoría de Conjuntos y Números Difusos

### 4.1. Definiciones sobre Conjuntos Difusos

A continuación se mencionan de forma breve algunas de las definiciones más importantes a conocer sobre la teoría de conjuntos difusos.

#### *Definición 1. (Conjunto Difuso [10])*

Un conjunto difuso  $\tilde{A}$  de un conjunto universo  $X$ , es un subconjunto de la forma:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

Donde  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  es un número real en el intervalo  $[0,1]$  conocido como el grado de membresía o pertenencia del elemento  $x \in X$  en el conjunto  $\tilde{A}$ . La función  $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$  se define como la función de membresía del conjunto difuso  $\tilde{A}$ .

#### *Definición 2. (Soporte de un Conjunto Difuso [11])*

Dado un conjunto difuso  $\tilde{A}$ , se define el soporte de  $\tilde{A}$ , denotado por  $Supp(\tilde{A})$ , como el conjunto ordinario:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

#### *Definición 3. (Núcleo de un Conjunto Difuso [10])*

Dado un conjunto difuso  $\tilde{A}$ , se define el núcleo de  $\tilde{A}$ , denotado por  $Ker(\tilde{A})$ , como el conjunto ordinario:

$$Ker(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Se dice que  $\tilde{A}$  es un conjunto difuso normal si  $Ker(\tilde{A}) \neq \emptyset$ .

#### *Definición 4. ( $\alpha$ -corte de un Conjunto Difuso [10])*

Dado un conjunto difuso  $\tilde{A}$ , se define el  $\alpha$ -corte de  $\tilde{A}$ , denotado por  $\tilde{A}_\alpha$ , como el conjunto:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Para cualquier  $\alpha \in [0,1]$ .

**Definición 5. (Convexidad de un Conjunto Difuso [11])**

Un conjunto difuso  $\tilde{A}$  es convexo, si y sólo si, para toda  $x, y \in X$  y para toda  $\lambda \in [0,1]$  se cumple que:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

**Definición 6. (Número Difuso [10])**

Se dice que  $\tilde{c}$  es un número difuso en el conjunto de los números reales si:

- $\tilde{c}$  es normal.
- Para todo  $\alpha \in (0,1]$ ,  $\tilde{c}_\alpha$  es un intervalo cerrado.

**Definición 7. (Número Difuso L – R)**

Se dice que  $\tilde{c}$  es un número difuso triangular o del tipo  $L - R$ , si y sólo si, su función de membresía es de la forma:

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} L(x) = \frac{x - m + a}{a} & \text{si } x \leq m, a > 0 \\ R(x) = \frac{m - x + b}{b} & \text{si } x \geq m, b > 0 \\ 0 & \text{si } x < m - a \text{ ó } x > m + b \end{cases}$$

Donde  $m$  es la moda de  $\tilde{c}$ ,  $a$  y  $b$  representan las amplitudes por izquierda y por derecha,  $L(x)$  y  $R(x)$  describen una función a la izquierda y a la derecha de  $m$ , respectivamente, siendo  $L$  no decreciente y  $R$  no creciente. El número difuso  $\tilde{c}$  del tipo  $L - R$  se lo denota por:

$$\tilde{c} = (m - a, m, m + b)_{LR}$$

**4.2. Operaciones con Números Difusos**

Conforme a lo mencionado en [10], las principales operaciones con números difusos del tipo  $L - R$  se definen como:

**Definición 8. (Suma de Números Difusos)**

Sean  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$  dos números difusos del tipo  $L - R$  definidos sobre el conjunto de los números reales. La suma  $\tilde{A} + \tilde{B}$  está dada por:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_{LR}$$

**Definición 9. (Producto de un Escalar por un Número Difuso)**

Sea  $\tilde{A} = (a, b, c)$  un número difuso del tipo  $L - R$  definido sobre el conjunto de los números reales y sea  $k \in R$ . El producto  $k\tilde{A}$  está dado por:

$$k\tilde{A} = \begin{cases} (ka, kb, kc)_{LR} & \text{si } k \geq 0 \\ (-kc, kb, -ka)_{LR} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

**4.3. Métodos de Comparación de Números Difusos**

Sea  $F(R)$  el conjunto de todos los números difusos en los reales y  $g: F(R) \rightarrow R$  una función ordenadora lineal [11], es decir, que cumple con:

- $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F(R) \quad g(\tilde{A} + \tilde{B}) = g(\tilde{A}) + g(\tilde{B})$
- $\forall \alpha \in R^+ \quad \forall \tilde{A} \in F(R) \quad g(\alpha\tilde{A}) = \alpha g(\tilde{A})$

Entonces, dados dos números difusos cualesquiera  $A, B \in F(R)$ , se tiene que:

- $g(\tilde{A}) < g(\tilde{B}) \Leftrightarrow \tilde{A} < \tilde{B}$
- $g(\tilde{A}) > g(\tilde{B}) \Leftrightarrow \tilde{A} > \tilde{B}$
- $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$

Conforme a lo mencionado en [11], los principales métodos de comparación de números difusos basados en funciones ordenadoras lineales son:

**Método 1. (Primer Índice de Yager)**

Dado el número difuso  $\tilde{A} = (m - a, m, m + b)$  del tipo  $L - R$ , el primer índice de Yager define la función lineal ordenadora  $g$  como:

$$g(\tilde{A}) = \frac{\int_{m-a}^{m+b} h(x)u_A(x)dx}{\int_{m-a}^{m+b} u_A(x)dx}$$

Donde  $h(x)$  es una medida de la importancia del valor  $x$ . Si  $h(x) = x$ , este índice representa la abscisa del centro de gravedad del número difuso  $\tilde{A}$ . Resolviendo la expresión anterior, para el caso del número difuso triangular, el valor del índice está dado por:

$$g(\tilde{A}) = \frac{1}{3}(3m - a + b)$$

**Método 2. (Tercer Índice de Yager)**

Dado el número difuso  $\tilde{A} = (m - a, m, m + b)$  del tipo  $L - R$ , el tercer índice de Yager define la función lineal ordenadora  $g$  como:

$$g(\tilde{A}) = \int_0^1 M(u_\alpha) d\alpha$$

Donde  $u_\alpha$  es el  $\alpha$ -corte del número difuso  $\tilde{A}$  y  $M(u_\alpha)$  es el valor medio de los elementos que forman parte de  $u_\alpha$ . Para el caso de un número difuso triangular, el conjunto  $u_\alpha$ , el cual se obtiene resolviendo para la variable  $x$  el sistema de inequaciones  $L(x) \geq \alpha$  y  $R(x) \geq \alpha$ , es:

$$u_\alpha = [m - a(1 - \alpha), m + b(1 - \alpha)]$$

Luego, el valor medio de los elementos de  $u_\alpha$  está dado por:

$$M(u_\alpha) = \frac{2m + (1 - \alpha)(b - a)}{2}$$

Finalmente, resolviendo la integral inicial, el valor del índice para el número difuso triangular está dado por:

$$g(\tilde{A}) = \frac{1}{4}(4m - a + b)$$

**Método 3. (Relación de Adamo)**

Dado el número difuso  $\tilde{A} = (m - a, m, m + b)$  del tipo  $L - R$ , la relación de Adamo define la función lineal ordenadora  $g$  como:

$$g(\tilde{A}) = \max\{x | u_A(x) \geq \alpha\}$$

La cual establece un índice de  $\alpha$ -preferencia con  $\alpha \in [0,1]$ . Luego, para el caso de los números difusos triangulares, el valor del índice está dado por:

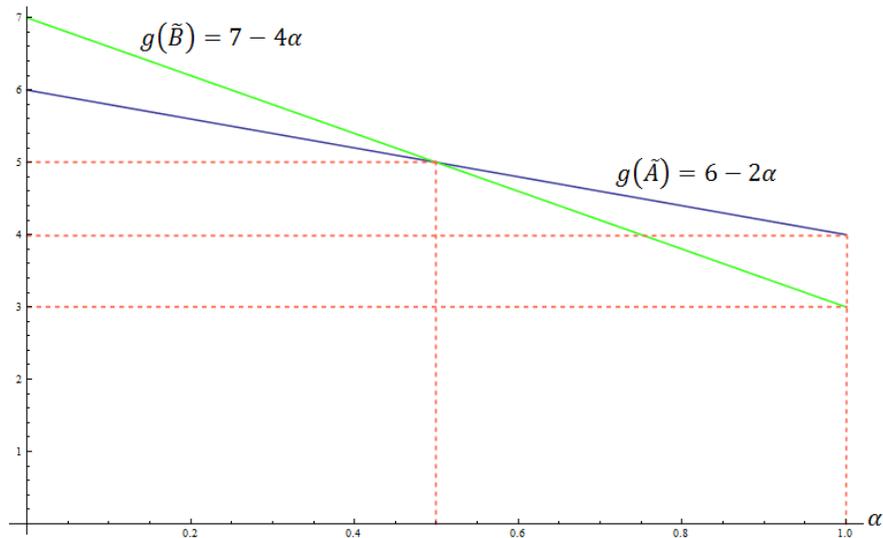
$$g(\tilde{A}) = m + b(1 - \alpha)$$

Donde el valor de  $\alpha \in [0,1]$  debe ser seleccionado por el decisor.

**Ejemplo 4.1.**

Consideremos los números difusos  $\tilde{A} = (1,4,6)$  y  $\tilde{B} = (2,3,7)$  del tipo  $L - R$ . Usando los tres métodos de comparación que se han mencionado tenemos:

- **Primer Índice de Yager:**  $g(\tilde{A}) = \frac{11}{3}$  y  $g(\tilde{B}) = \frac{12}{3}$ , por lo tanto  $\tilde{B}$  es mayor que  $\tilde{A}$ .
- **Tercer Índice de Yager:**  $g(\tilde{A}) = \frac{15}{4}$  y  $g(\tilde{B}) = \frac{15}{4}$ , por lo tanto  $\tilde{A}$  es igual a  $\tilde{B}$ .
- **Relación de Adamo:**  $g(\tilde{A}) = 6 - 2\alpha$  y  $g(\tilde{B}) = 7 - 4\alpha$ , por lo tanto  $\tilde{B}$  es mayor que  $\tilde{A}$  sólo para determinados valores de  $\alpha$  tal como se puede observar en la gráfica siguiente:



**Figura 3: Gráfico de la Relación de Adamo**

En el ejemplo se puede visualizar que una de las principales desventajas de usar números difusos consiste en establecer un mecanismo de comparación adecuado al problema, pues el resultado de ésta comparación varía significativamente dependiendo del método usado. Como podemos apreciar, la jerarquía de orden de ambos números cambia conforme se cambia el método de comparación utilizado.

**5. Programación Matemática Difusa**

La programación matemática difusa nace en el contexto de la Investigación de Operaciones, a raíz de la introducción de la teoría de conjuntos difusos, hecha por el profesor Lofti Zadeh en 1965. En este ámbito, y sin profundizar demasiado en el área, existen cuatro tipos de problemas de programación matemática difusa según se presente la ambigüedad de la información en las variables de decisión, en los lados derechos de las restricciones, en los coeficientes de la función objetivo o en los coeficientes de la matriz tecnológica. En este trabajo de investigación, se abordarán únicamente los problemas de programación matemática donde la imprecisión de la información está presente en los lados derechos del modelo. El lector podrá estudiar los otros modelos revisando las referencias [10], [11] y [12].

### 5.1. Programación Lineal Entera con Lados Derechos Difusos

Un modelo de programación lineal entera, de forma genérica, puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} \\
 \sum_j a_{i,j} x_j &\leq b_i && \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 && \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N && \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Donde  $N$  es el conjunto de los números naturales,  $c_j, b_i, a_{ij} \in R$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ . Este tipo de modelos consideran, entre sus supuestos, que la información que se tiene sobre el sistema que están representando es conocida con exactitud, lo cual en la práctica no sucede en la mayoría de los casos, debido a que estos datos son el producto de estimaciones hechas por parte de los expertos del sistema, de mediciones realizadas por el equipo de consultores que desarrollan el modelo, pronósticos, etc. En resumen, tienen un nivel de imprecisión que no considera el modelo, de ahí que muchas soluciones desarrolladas fracasasen al momento de querer implantarlas en las empresas.

Para que la ambigüedad e imprecisión que rodea a los datos recolectados de un sistema, sea considerada dentro de los modelos matemáticos, se introdujo lo que hoy se conoce como Programación Matemática Difusa. En particular, el tema que aborda esta sección es la Programación Lineal Entera Difusa (FILP por sus siglas en inglés), donde la ambigüedad de la información se presenta en los lados derechos del modelo.

El modelo de programación lineal entera que considera los lados derechos de las restricciones como números difusos es:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} \\
 \sum_j a_{i,j} x_j &\leq_g \tilde{b}_i && \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 && \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N && \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{b}_i$  es un número difuso y el símbolo  $\leq_g$  define algún método de comparación entre números difusos.  $N$  es el conjunto de los números naturales,  $a_{i,j}, c_j \in R$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ . Estos modelos sirven para representar situaciones donde es difícil cumplir determinados estándares y se permite cierto grado de violación en el cumplimiento de dichos estándares. Dependiendo el tipo de problema que se modele, se escoge el tipo de número difuso a usar en el lado derecho.

Para resolver este tipo de modelos se suele recurrir a una transformación del mismo para convertirlo en un modelo de programación lineal entera paramétrica o a algún mecanismo de comparación de números difusos entre ambos lados de las restricciones.

#### *Aplicación de Métodos de Comparación*

Supongamos que el número difuso  $\tilde{b}_i$  es del tipo  $L - R$ . Utilizaremos alguno de los métodos de comparación de números difusos para transformar el problema de programación lineal entera difusa en un modelo

equivalente de programación lineal entera determinístico. Para ejemplificar esto, sea  $\tilde{b}_i = (b_i - l_i, b_i, b_i + r_i)$  con  $b_i, l_i, r_i \in R^+$  un número difuso del tipo  $L - R$  y, consideremos que un número real  $q$  puede ser representado como un número difuso haciendo  $q = (q, q, q)$ . Entonces, el problema de programación lineal entera difusa se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \left( \sum_j a_{i,j} x_j, \sum_j a_{i,j} x_j, \sum_j a_{i,j} x_j \right) &\leq_g (b_i - l_i, b_i, b_i + r_i) & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Dependiendo del método de comparación utilizado, el modelo anterior se puede simplificar en cualquiera de los que se muestran a continuación:

**Primer Índice de Yager**

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\leq \frac{1}{3} (3b_i + r_i - l_i) & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

**Tercer Índice de Yager**

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\leq \frac{1}{4} (4b_i + r_i - l_i) & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

**Relación de Adamo**

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\leq b_i + r_i (1 - \alpha) & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Hay que recalcar el hecho de que, usando los dos primeros métodos de comparación de números difusos y resolviendo los problemas de programación matemática asociados, se obtienen soluciones puntuales para el problema inicial, mientras que el tercero nos reporta un conjunto con diversas soluciones al problema, las cuales se generan por cada variación que se haga al parámetro  $\alpha$  y son puestas a consideración del decisor, quien será el que escoja la solución definitiva a implantar.

**Aplicación de la Programación Paramétrica**

J. L. Verdegay [13] supone que la función de membresía para la  $i$  – ésima restricción es lineal y demuestra, por medio del Teorema de Representación de los Números Difusos, que la solución óptima del problema de programación lineal entera con lados derechos difusos, se puede obtener resolviendo su equivalente en programación paramétrica, mostrado a continuación:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} & \\
 a_i x &\leq b_i + d_i(1 - \alpha) & \forall i = 1, 2 \dots, m \\
 x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 \alpha &\in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Nótese cómo éste último modelo pareciera ser idéntico al que se obtiene al aplicar la relación de Adamo en los métodos de comparación de números difusos. Sin embargo, no lo es, pues como veremos más adelante para el caso de la igualdad, la relación de Adamo pierde la información relacionada con el extremo izquierdo del número difuso que se esté utilizando.

El problema anterior, al cual denotaremos  $P_\alpha$ , puede ser resuelto por medio del enfoque utilizado en la programación lineal entera paramétrica [14], que consiste en:

- **Paso 1:** Hacer  $\alpha = 0$  y resolver  $P_\alpha$  utilizando cualquier método.
- **Paso 2:** Probar la solución encontrada en cada restricción para hallar el mínimo valor de  $\alpha$ , denotado por  $\alpha_1$ , para el cual la solución aún permanece factible. Luego la solución hallada será óptima para la familia de problemas  $P_\alpha$  para  $\alpha \leq \alpha_1 \leq 1$ .
- **Paso 3:** Si  $\alpha_1 \geq 1$  finalizar y reportar todas las soluciones  $X_\alpha$  encontradas. Caso contrario avanzar al paso 4.
- **Paso 4:** Hacer  $\alpha = \alpha_1 + 0.01$ , resolver  $P_\alpha$  utilizando cualquier método y regresar al paso 2.

El conjunto solución para el problema  $P_\alpha$  arriba mencionado, es el conjunto difuso  $\tilde{S} = \{X_\alpha/\alpha\}$  para  $\alpha \in [0, 1]$ . Este algoritmo también se puede aplicar para resolver el modelo obtenido después de aplicar la relación de Adamo en la sección anterior.

**El Caso de la Igualdad**

Hasta ahora se han estudiado los esquemas propuestos para resolver los modelos de programación lineal entera difusa donde las restricciones son desigualdades. Consideremos ahora el siguiente problema de optimización con restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} & \\
 \sum_j a_{i,j} x_j &= \tilde{b}_i & \forall i = 1, 2 \dots, m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0 && \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N && \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{b}_i$  es un número difuso y el símbolo  $=_g$  establece algún mecanismo de comparación de números difusos. Sea el número difuso del tipo  $L - R$  o triangular  $\tilde{b}_i$ , es decir, tiene la forma  $\tilde{b}_i = (b_i - l_i, b_i, b_i + r_i)$  con  $b_i, l_i, r_i \in R^+$ , la función de membresía de la  $i$  –ésima restricción estaría definida por:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i x \leq b_i - l_i \\ \frac{a_i x - b_i + l_i}{l_i} & \text{si } b_i - l_i \leq a_i x \leq b_i \\ 1 & \text{si } a_i x = b_i \\ \frac{b_i + r_i - a_i x}{r_i} & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i + r_i \\ 0 & \text{si } a_i x \geq b_i + r_i \end{cases}$$

Reemplazando la restricción de igualdad por sus dos restricciones de desigualdad equivalentes, y siguiendo el enfoque propuesto en [15], el modelo anterior se puede resolver utilizando su equivalente en programación paramétrica, mostrado a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} & \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\leq b_i + r_i(1 - \alpha) && \forall i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\geq b_i - l_i(1 - \alpha) && \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 && \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N && \forall j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Cabe recalcar, que de no existir otras restricciones en el modelo, además de las que involucran los números difusos, el problema anterior puede tener infinitas soluciones, las cuales se generan por cada variación que se haga en el parámetro  $\alpha$ . Para evitar esto, se recomienda generar una solución para un conjunto de valores del parámetro  $\alpha$ , los cuales pueden ser definidos por el decisor o por el modelizador del problema según convenga. Otro enfoque consiste en resolver el problema equivalente asociado con el uso de algunos de los métodos de comparación de números difusos ya mencionados.

## 6. Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP)

### 6.1. Origen del IRP

El Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés), nace en torno del ámbito logístico a raíz de la implantación, en medianas y grandes empresas, de los esquemas de Inventario Manejado por el Proveedor (VMI por sus siglas en inglés). Esta filosofía de trabajo consiste en que el proveedor deberá monitorear constantemente los niveles de inventario de sus clientes, determinar cuándo reabastecerlos y en qué cantidad, así como elaborar la hoja de ruta que deberán recorrer sus camiones al momento de realizarse la distribución.

Este esquema logístico plantea la necesidad al proveedor, de integrar en un sólo modelo las decisiones asociadas con el ruteo de los vehículos, la cantidad de producto a enviar a cada cliente cada día y el nivel de

inventario que se deberá mantener en las bodegas de los mismos, de tal forma que se minimicen todos los costos operativos asociados. Dada la creciente necesidad de desarrollar políticas óptimas de operación para este esquema logístico, en el año de 1984, Awi Federgruen y Paul Zipkin publican un artículo titulado “*A Combined Vehicle Routing and Inventory Allocation Problem,*” donde se propone un modelo integrado de ruteo de vehículos con localización de inventarios, dando origen a lo que hoy se conoce como *Inventory Routing Problem*.

Este modelo logístico se ajusta a la problemática tratada en el presente trabajo de investigación, debido a que el giro de negocio de la industria de los cajeros automáticos genera un esquema VMI de forma natural, es decir, no hay que establecer un contrato entre el proveedor y los clientes para que se adopte este esquema, dado que los cajeros (clientes) no tienen capacidad de decisión sobre cómo deben ser reabastecidos. Es obligación del proveedor (dueño de los cajeros), decidir sobre cómo estos serán atendidos, de tal forma que los costos de distribución, inventario, nivel de servicio sean minimizados y la calidad del servicio mantenida.

### 6.2. Descripción Matemática del IRP

El problema en su versión básica consiste en, dado un conjunto de clientes (cajeros) y un almacén central (banco matriz) desde el cual se los atenderá, determinar cuál es el conjunto de rutas de distribución, la cantidad de producto (dinero en efectivo) a enviar a cada cliente junto con los niveles de inventario que se deben mantener, para cada día o instante de tiempo dentro del horizonte de planificación, de tal forma que, se minimicen los costos de inventario y distribución. Nótese que, a diferencia del problema clásico de ruteo de vehículos, la cantidad a enviar a cada cliente es ahora una variable de decisión por lo cual no necesariamente se debe visitar a todos los clientes todos los días, considerando que los niveles de inventario en las bodegas de los mismos, deben ser suficientes para cubrir la demanda para los días que no son atendidos.

En la Figura 4 se puede apreciar cómo suelen ser diseñadas las rutas en un modelo de IRP. En el día 1 todos los clientes son visitados estableciéndose dos rutas, mientras que en el día 2, sólo algunos de ellos son visitados estableciéndose una única ruta para atenderlos. Este plan de visitas implica que los clientes que no son visitados en el día 2, tienen el suficiente nivel de stock en sus bodegas para cubrir la demanda de ese día.

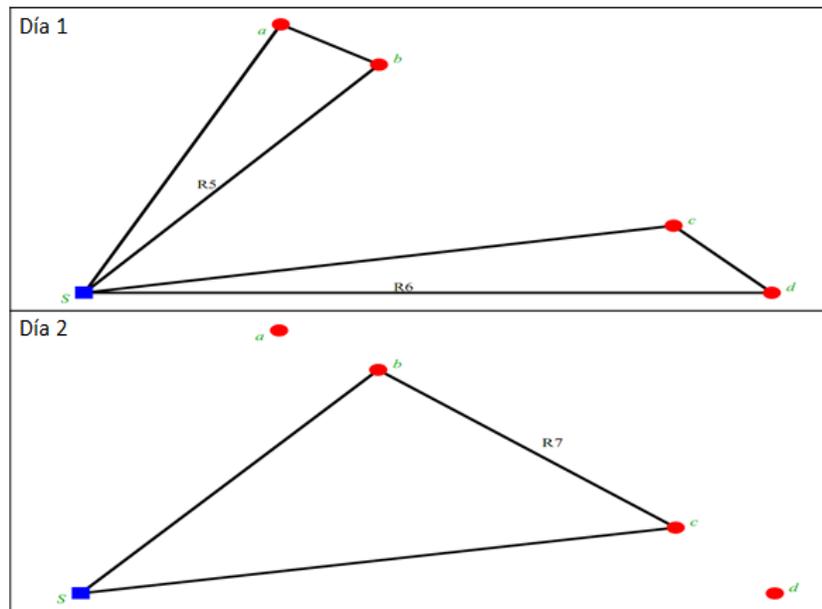


Figura 4: Plan de Ruteo del IRP

El modelo de programación matemática propuesto por Federgruen y Zipkin [16] considera un horizonte de tiempo continuo y una función objetivo no lineal, lo cual hace al problema muy difícil de tratar en periodos

razonables de tiempo. Una formulación de programación lineal entera mixta se menciona en [17], sin embargo, ésta considera que se conocen todas las posibles rutas con anticipación y plantea un esquema de selección de ruta para el día que el cliente deba ser visitado, lo cual es difícil de manejar en problemas de gran escala, debido a que generar todas las rutas posibles exige demasiado tiempo computacional y no nos ayuda a resolver el problema de interés.

Los modelos de programación entera mixta considerando un horizonte de tiempo finito y discreto, facilitan en cierto grado el manejo de problema, debido a que se puede descomponer con base en dos decisiones; determinar qué clientes van a ser visitados cada día junto con la cantidad de producto que van a recibir, para luego decidir cómo rutear los vehículos para visitar dichos clientes. Este enfoque plantea la resolución de un problema de ruteo de vehículos (VRP) para cada instante de tiempo, el cual es un problema de la clase NP-Hard [18], por lo cual se puede deducir inmediatamente que el IRP también pertenece a la clase de problemas NP-Hard.

El Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP), ha sido ampliamente estudiado desde dos principales enfoques, el determinístico y el probabilístico. La principal diferencia entre estos radica en que la demanda de los clientes en el primer caso es conocida con certeza, mientras que en el segundo se ajusta a una distribución de probabilidad. De igual forma, se han propuesto varias estrategias de solución, que van desde el uso de métodos exactos como los algoritmos de Branch and Bound, hasta la implementación de métodos metaheurísticos como la Búsqueda Tabú. El lector podrá revisar los trabajos relacionados con estos temas en la referencias [17], [19], [20] y [21].

## 7. Formulación del Modelo Matemático

Para la formulación del modelo matemático del problema tratado en esta investigación se tomó como base el modelo de tres índices para el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP por sus siglas en inglés) presentado en [18], y la consideración de que el IRP puede ser visto como un VRP multiperiodo.

### 7.1. Modelo Matemático: Entorno Determinístico

El modelo de programación lineal entera mixta que representa al problema tratado en esta investigación, considerando un entorno determinístico, está conformado por:

#### *Datos*

- $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de nodos, clientes o cajeros. El nodo  $i = 0$  representa el depósito central o, en este caso particular, el banco matriz de la institución financiera.
- $T = \{1, 2, \dots, H\}$  es el conjunto finito y discreto de los instantes de tiempo pertenecientes al horizonte de planificación considerado.
- $K = \{1, 2, \dots, m\}$  es el conjunto de vehículos disponibles con capacidad de transporte homogénea.
- $CapV$  es la capacidad de carga de los vehículos.
- $CapC$  es la capacidad de almacenamiento de los cajeros.
- $r$  es la tasa de mantenimiento del inventario.
- $c_{i,j}$  es el costo de transporte desde el nodo  $i$  al nodo  $j$ .
- $Dem_i^t$  es la demanda del cajero  $i$  en el instante de tiempo  $t$ .

#### *Variables de Decisión*

- $Q_{i,k}^t =$  Cantidad de dinero enviado al cajero  $i$  usando el vehículo  $k$  en el tiempo  $t$
- $s_i^t =$  Nivel de inventario guardado en el cajero  $i$  en el tiempo  $t$
- $y_{i,k}^t = \begin{cases} 1, & \text{si el cajero } i \text{ es visitado por el vehículo } k \text{ en el tiempo } t \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

- $x_{i,j}^{k,t} = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (i,j) \text{ es usado por el vehículo } k \text{ en el tiempo } t \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

**Modelo Matemático**

$$\text{Min } z = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_t c_{i,j} x_{i,j}^{k,t} + \sum_i \sum_t r s_i^t \tag{7.1}$$

S. t:

$$\sum_k y_{i,k}^t \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \tag{7.2}$$

$$\sum_k y_{0,k}^t \leq m \quad \forall t \in T \tag{7.3}$$

$$\sum_j x_{i,j}^{k,t} = y_{i,k}^t \quad \forall i \in V \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.4}$$

$$\sum_j x_{i,j}^{k,t} = \sum_j x_{j,i}^{k,t} \quad \forall i \in V \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.5}$$

$$\sum_{i \neq 0} Q_{i,k}^t \leq \text{Cap}V \quad \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.6}$$

$$Q_{i,k}^t \leq \text{Cap}C - s_i^{t-1} + M(1 - y_{i,k}^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.7}$$

$$Q_{i,k}^t \leq \text{Cap}C \cdot y_{i,k}^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.8}$$

$$s_i^t = s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - \text{Dem}_i^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \tag{7.9}$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{i,j}^{k,t} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \ |S| \geq 2 \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.10}$$

$$Q_{i,k}^t \geq 0 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.11}$$

$$s_i^t \geq 0 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \tag{7.12}$$

$$y_{i,k}^t \in \{0,1\} \quad \forall i \in V \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.13}$$

$$x_{i,j}^{k,t} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \in V \forall k \in K \forall t \in T \tag{7.14}$$

La ecuación (7.1) busca minimizar los costos de ruteo y de inventario, la (7.2) asegura que en cada instante de tiempo un cajero sea visitado máximo una vez, la (7.3) impone que del banco matriz no salgan más vehículos de los que se tienen disponibles en cada instante de tiempo, la (7.4) y la (7.5) son las restricciones de grado de los nodos de la red, la (7.6) garantiza que la capacidad de los vehículos no sea excedida, la (7.7) y la (7.8) aseguran que un cajero que no es visitado en un determinado instante de tiempo, no reciba dinero mientras que el que sí es visitado no reciba un monto superior a su capacidad menos el inventario que ya poseía almacenado, la (7.9) garantiza la continuidad en el flujo de inventario a través del tiempo, la (7.10) es la restricciones de eliminación de subciclos similares a las referenciadas en [18]. Finalmente, las ecuaciones de la (7.11) a la (7.14) imponen las condiciones de signo y lógica que deben cumplir las variables de decisión.

Un modelo similar al presentado en esta sección fue propuesto en [22], sin embargo, sus principales diferencias radican en que no se consideran en la función objetivo los costos de mantenimiento del inventario y que se utiliza una función de demanda acumulada para garantizar el abastecimiento de cada cajero y así no exceder la capacidad del mismo.

## 7.2. Modelo Matemático: Entorno Difuso

Como se describió en los capítulos anteriores, uno de los principales aportes de este trabajo de investigación consiste en la introducción de una nueva variante para el IRP, el IRP difuso. En el contexto del problema tratado, el único factor que se considerará difuso es la estimación de la demanda de los cajeros de la red bancaria, por lo cual, la única restricción que es influenciada directamente es la (7.9), la cual se reformularía como:

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t =_g \widetilde{Dem}_i^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (7.15)$$

Dependiendo del enfoque que se utilice para resolver el modelo matemático formado por las ecuaciones (7.1)-(7.8), (7.15), (7.10)-(7.14) y, suponiendo que la demanda estimada de los cajeros es un número difuso triangular dado por  $\widetilde{Dem}_i^t = (Dem_i^t - \Delta L_i^t, Dem_i^t, Dem_i^t + \Delta R_i^t)$  con  $\Delta L_i^t, \Delta R_i^t \geq 0 \forall i \in V \setminus \{0\}$  y  $\forall t \in T$ , la restricción (7.15) podría ser reemplazada por cualquiera de las siguientes opciones:

### Programación Paramétrica

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \leq Dem_i^t + \Delta R_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (7.16)$$

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \geq Dem_i^t - \Delta L_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (7.17)$$

### Primer Índice de Yager

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = \frac{1}{3}(3Dem_i^t + \Delta R_i^t - \Delta L_i^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (7.18)$$

### Tercer Índice de Yager

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = \frac{1}{4}(4Dem_i^t + \Delta R_i^t - \Delta L_i^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (7.19)$$

### Relación de Adamo

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = Dem_i^t + \Delta R_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (7.20)$$

En caso de utilizarse la programación paramétrica para resolver el problema, se deben establecer previamente los valores del parámetro  $\alpha$  a utilizar, con el fin de evitar la infinidad de soluciones que se generarían por cada variación hecha a este parámetro.

Como no existe una regla en base a la cual se los pueda establecer, estos valores deberán ser determinados acorde al problema concreto que se esté resolviendo y a los deseos del decisor, o gerente de la institución bancaria.

## 8. Experiencia Computacional y Resultados Finales

Para resolver el problema se ejecutó un algoritmo basado en la metaheurística Harmony Search [23] considerando las siguientes características de la red:

- **Naturaleza de la Demanda:** Difusa y dinámica (cambia con el tiempo).
- **Función de Distancia:** Métrica de Manhattan.
- **Número de Cajeros en la Red:** 158 cajeros con sus coordenadas cartesianas.

- **Número de Vehículos:** Determinados por el algoritmo.
- **Capacidad del Vehículo:** 10 veces la capacidad de un cajero simple.
- **Capacidad del Cajero Simple:** USD\$ 350,000.00
- **Capacidad de Cajero Anidado:** Cantidad de cajeros contenidos por USD\$ 350,000.00
- **Tasa de Inventario:** 0.10 anual (sugerida por el gerente)
- **Horizonte de Planificación:** 7 días

Para determinar el tipo de número difuso que modelará la demanda de los cajeros de la red bancaria se consideró los deseos del gerente, quien quiere conocer cuáles serían las políticas de reabastecimiento si se ofrece un nivel de servicio mínimo del 95% y máximo del 100% variando en un 1% el incremento del mismo. Esto se traduce en que se desea conocer las políticas de reabastecimiento óptimas si se cubre el 95%, 96%, 97%, 98%, 99% y 100% de la demanda estimada por ellos.

Lo anterior se traduce en un número difuso del tipo triangular donde  $\Delta L$  será la variación de la demanda no cubierta y  $\Delta R = 0$  en todos los casos. En problema real, la Relación de Adamo carece de sentido pues el valor de  $\Delta R_i^t$  es cero. Por otra parte, las inecuaciones (7.16) y (7.17) se simplifican a:

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \leq Dem_i^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (8.1)$$

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \geq Dem_i^t - \Delta L_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (8.2)$$

Debido a la dirección de optimización del modelo, la cual busca minimizar los costos de ruteo e inventario, la restricción (8.2) será activa satisfaciendo la igualdad, puesto que enviar una unidad adicional incurre en un costo extra de inventario, y dejando redundante la inecuación (8.1). Por lo cual, las dos inecuaciones anteriores pueden ser reemplazadas por:

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = Dem_i^t - \Delta L_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (8.3)$$

Siguiendo los deseos del decisor, los valores de  $\alpha$  que permiten modelar sus preferencias de nivel de servicio para el caso de la programación paramétrica se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1: Valores del Parámetro  $\alpha$**

Nivel de Servicio	Valor de $\alpha$
95%	0
96%	0.2
97%	0.4
98%	0.6
99%	0.8
100%	1

Finalmente, los dos enfoques restantes no se utilizarán para resolver el problema, debido a que no nos permiten representar las preferencias del gerente en cuanto a los niveles de cobertura de demanda deseados.

Los resultados obtenidos con el algoritmo de acuerdo a cada valor de  $\alpha$  establecido en la Tabla 1 se muestran en la Tabla 2.

**Tabla 2: Resultados Obtenidos con el Algoritmo Desarrollado**

$\alpha$	<i>Costo Ruteo</i>	<i>Costo Inventario</i>	<i>Costo Total</i>	<i>Tiempo (Seg.)</i>
0	634.19	5,280.74	5,914.93	1123.82
0.2	599.42	5,606.79	6,206.21	1239.91
0.4	599.37	5,759.69	6,359.06	1234.57
0.6	598.26	6,027.17	6,625.43	997.29
0.8	609.92	5,980.05	6,589.97	1247.33
1	620.71	5,531.74	6,152.45	1118.99

Para verificar la eficiencia de las políticas propuestas por el algoritmo desarrollado, se procede a compararlas contra una de las políticas convencionales usadas por los bancos, la cual considera dos días fijos (lunes y viernes) para el reabastecimiento de los cajeros y no se regresan los residuos de efectivo al banco matriz. Los montos de efectivo que se cargan a los cajeros también son fijos, sin embargo, se utilizarán diferentes montos de reabastecimiento, los cuales se estimaron a través de una inspección breve de los datos de demanda disponibles. Los resultados obtenidos con esta política se muestran en la Tabla 3.

**Tabla 3: Costos de las Políticas Convencionales**

<i>Monto de Reabastecimiento</i>	<i>Costo de Ruteo</i>	<i>Costo de Inventario</i>	<i>Costo Total</i>	<i>Stockout</i>
<b>350,000.00</b>	ND <sup>1</sup>	205,658.05	205,658.05	No
<b>200,000.00</b>	ND	107,741.38	107,741.38	No
<b>150,000.00</b>	ND	75,102.49	75,102.49	No
<b>100,000.00</b>	ND	42,463.60	42,463.60	No
<b>75,000.00</b>	ND	26,583.88	26,583.88	Si

Claramente se puede apreciar que las políticas de reabastecimiento generadas por el algoritmo superan por mucho a las políticas convencionales aplicadas por los bancos, adicionando el hecho de que estas últimas no garantizan que un cajero se quede sin dinero, mientras que las propuestas en este trabajo de investigación si lo hacen.

## 9. Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se formuló un nuevo modelo programación entera mixta para resolver el problema de ruteo de vehículos con inventarios considerando la demanda de los nodos de la red como un número difuso y se lo aplicó para diseñar políticas óptimas de reabastecimiento para las redes de cajeros automáticos. A través de los experimentos computacionales se comprobó que este modelo resultó ser una herramienta muy eficaz para resolver este tipo de problemas hallando las soluciones óptimas para problemas de tamaño relativamente pequeños en un intervalo corto de tiempo.

La adecuada planificación del reabastecimiento de las redes de cajeros automáticos es de vital importancia en las áreas operativas de una institución financiera, debido a que una mala planificación puede acarrear grandes pérdidas económicas para la misma. Gracias a la tecnología existente se pueden evitar estos problemas, porque la planificación de los reabastecimientos ya no se realizarán usando el sentido común del administrador de la red que hasta ahora lo hacía usando los procedimientos ya establecidos por el banco en su

<sup>1</sup> No disponible

manual de operaciones y dejando al conductor del camión blindado decidir libremente sobre cómo realizar las visitas a los cajeros y cuáles vialidades utilizar.

Por lo mencionado anteriormente, salta a la luz la necesidad de desarrollar aplicaciones eficientes y fáciles de usar de manera que la planificación del reabastecimiento elaborada por el software sea sofisticada y optimice los recursos de la institución bancaria. Esto es minimice el gasto que se incurre en el uso de rutas de distribución no optimizadas y en el costo de oportunidad del efectivo guardado en inventario innecesariamente, lo cual mejora el nivel de servicio ofrecido por el banco a sus clientes. Finalmente, el algoritmo desarrollado puede ser utilizado como motor para la creación de este tipo de soluciones empresariales.

## 10. Agradecimientos

Este trabajo es producto del desarrollo de la tesis de maestría titulada “*Optimización del Reabastecimiento de una Red de Cajeros Automáticos con Estimación Difusa de la Demanda*” presentada por el Ing. Ramiro Saltos Atiencia, becario del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) a quien se hace llegar un agradecimiento especial por el completo financiamiento otorgado al desarrollo de la presente investigación.

## 11. Bibliografía

- [1] M. Wagner, "The Optimal Cash Deployment Strategy - Modeling a Network of Automated Teller Machines," Swedish School of Economics and Business Administration, Master of Science Thesis 2007.
- [2] Cash Connect, "ATM Vault Cash Management - Five Strategies for Optimizing a Cash Program," *A Guide from ATMmarketplace.com*, 2010.
- [3] R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina, J. Friman, and P. Drobinov, "Optimization of Cash Management for ATM Network," *Information Technology and Control*, vol. 36, no. 1A, 2007.
- [4] R. Armenise, C. Birtolo, E. Sangianantoni, and L. Troiano, "A Generative Solution for ATM Cash Management," Poste Italiane S.p.A., 2010.
- [5] R. Simutis, D. Dilijonas, and L. Bastina, "Cash Demand Forecasting for ATM using Neural Networks and Support Vector Regression Algorithms," in *20th EURO Mini Conference Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies*, 2008.
- [6] A. Brentnall, M. Crowder, and D. Hand, "Predictive Sequential Forecasting System Development for Cash Machine Stocking," *International Journal of Forecasting*, 2010.
- [7] R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina, and J. Friman, "A Flexible Neural Network for ATM Cash Demand Forecasting," in *6th WSEAS Int. Conference on Computational Intelligence, Man-Machine Systems and Cybernetics*, 2007.
- [8] S. D. Teddy and S. K. Ng, "Forecasting ATM Cash Demands using Local Learning Model of Cerebellar Associative Memory Network," *International Journal of Forecasting*, 2011.
- [9] M. H. Chen, "How Much Cash Should a Bank Maintain? - An Optimization Approach," Massachusetts Institute of Technology, Master of Science Thesis 1991.
- [10] C. Bing-Yuan, *Optimal Models and Methods with Fuzzy Quantities*, Springer Verlag, Ed. Berlín, Alemania, 2010.
- [11] J.M. Cadenas and J.L. Verdegay, *Modelos de Optimización con Datos Imprecisos*. Murcia, España, 1999.

- [12] J. M. Cadenas and J. L. Verdegay, "Fuzzy Optimization Models based Metaheuristics," *Revista Investigación Operativa*, vol. 29, no. 3, pp. 253-273, 2008.
- [13] J. L. Verdegay, "Fuzzy Mathematical Programming," in *Fuzzy Information and Decision Processes*, M. M. Gupta and E. Sánchez, Eds. Amsterdam: North-Holland, 1982, pp. 231-237.
- [14] M. G. Bailey and B. E. Gillett, "Parametric Integer Programming Analysis: A Contraction Approach," *The Journal of Operational Research Society*, vol. 31, pp. 257-262, 1980.
- [15] R. Zhao, R. Govind, and G. Fan, "The Complete Decision Set of the Generalized Symmetrical Fuzzy Linear Programming Problem," *Fuzzy Sets and Systems*, no. 51, pp. 53-65, 1992.
- [16] A. Federgruen and P. Zipkin, "A Combined Vehicle Routing and Inventory Allocation Problem," *Operation Research*, vol. 32, no. 5, pp. 1019-1037, Sep-Oct 1984.
- [17] A. Campbell, L. Clarke, A. Kleywegt, and M. Savelsbergh, "The Inventory Routing Problem," Mayo 1997.
- [18] P. Toth and D. Vigo, *The Vehicle Routing Problem*, Primera ed.: SIAM, 2002.
- [19] A. Kleywegt, V. Nori, and M. Savelsbergh, "The Stochastic Inventory Routing Problem with Direct Deliveries," Junio 1999.
- [20] A. Campbell and M. Savelsbergh, "A Decomposition Approach for the Inventory Routing Problem," *Transportation Science*, vol. 38, no. 4, pp. 488-502, Noviembre 2004.
- [21] C. Archetti, L. Bertazzi, A. Hertz, and M. G. Speranza, "A Hybrid Heuristic for an Inventory Routing Problem," 2009.
- [22] T. Henry, "A New Solution Approach for the Inventory Routing Problem: Using Vehicle Routing Problem Constructive Heuristics," Universidad de Singapore, Singapore, Tesis de Maestría 2005.
- [23] Z. W. Geem, J. H. Kim, and G. V. Loganathan, "A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search," *Simulation*, vol. 2, pp. 60-68, 2001.